

## 面心立方金属的基于位错密度的循环本构模型

任学红<sup>1</sup>, 杨绍普<sup>2†</sup>, 文桂林<sup>1</sup>, 赵文杰<sup>1</sup>

(1. 湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 湖南 长沙 410082;

2. 石家庄铁道大学 省部共建交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室, 河北 石家庄 050043)

**摘要:**在晶体塑性理论框架下, 建立适用于面心立方金属多晶材料的基于位错密度的循环本构模型. 在各向同性硬化律中总位错密度被离散为螺位错和刃位错两部分, 考虑了位错增殖、湮灭和相互作用的演化机制, 同时采用了修正的非线性随动硬化律, 建立单晶的循环本构模型, 通过显式尺度过渡准则, 把该模型拓展到多晶尺度. 应用该模型模拟了典型面心立方结构材料多晶铜的棘轮行为. 数值模拟结果表明, 该模型不仅可以从多晶尺度模拟材料的棘轮行为和循环硬化特征, 还可以从单晶尺度预测不同晶向和不同应力水平下的棘轮行为.

**关键词:**位错密度; 晶体塑性; 本构模型; 棘轮行为

**中图分类号:** O345

**文献标志码:** A

## Cyclic Constitutive Model Based on Dislocation Density of Face-centered Cubic Metals

REN Xuehong<sup>1</sup>, YANG Shaopu<sup>2†</sup>, WEN Guilin<sup>1</sup>, ZHAO Wenjie<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures,

Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

**Abstract:** Under the framework of crystal plasticity theory, a cyclic constitutive model based on dislocation density for face-centered cubic metals is proposed. The total dislocations are discretized into edge and screw components, and the multiplication, annihilation and interaction of dislocations are considered as the basic evolutionary mechanisms. At the same time, a cyclic constitutive model of single crystal is established by using the modified non-linear kinematic hardening rule. Then, the model is extended from single crystal scale to polycrystalline scale by explicit scale transition rule. The ratchetting strain of polycrystalline copper with typical face-centered cubic structure is simulated by using the proposed model. The numerical results show that the model can not only simulate the ratchetting strain and cyclic hardening characteristics of materials at polycrystalline scale, but also predict the ratchetting of materials at different orientations and stress levels from single crystal scale.

**Key words:** dislocation density; crystal plasticity; constitutive model; ratchetting strain

\* 收稿日期:2019-05-21

基金项目:国家自然科学基金联合基金资助项目(U1534204), Joint Funds of the National Natural Science Foundation of China(U1534204); 国家自然科学基金重大资助项目(11790282), Major Program of the National Natural Science Foundation of China(11790282)

作者简介:任学红(1987—),女,河北石家庄人,湖南大学博士研究生

† 通讯联系人, E-mail: yangsp@stdu.edu.cn

棘轮变形是材料或者结构在平均应力非零的应力循环下发生的塑性变形的累积.近年来,描述棘轮行为的循环本构模型得到了众多学者的广泛研究<sup>[1-3]</sup>,但是这些本构模型大多是基于实验结果建立的宏观唯象的循环本构模型.然而 Feaugas 等<sup>[6]</sup>研究发现棘轮行为与非均匀位错亚结构有关,如位错墙和位错胞等. Kang 和 Dong 等<sup>[7-8]</sup>应用透射电子显微镜对面心立方金属材料 316L 不锈钢棘轮变形过程中不同阶段的位错结构进行了研究,同样发现极化的位错结构是材料棘轮变形的微观机制,上述宏观唯象的本构模型未考虑材料棘轮变形的微观机制.

近年来,基于材料循环变形的位错滑移机制建立的晶体塑性模型得到了发展. Xu 等<sup>[9]</sup>首先建立了单晶铜的晶体塑性循环本构模型,然而该模型仅模拟了铜单晶在应变控制循环载荷作用下的响应,不涉及单晶铜的棘轮效应;Cailletaud 等<sup>[10]</sup>通过引入尺度过渡准则,把单晶尺度的循环本构模型拓展到了多晶尺度,进而模拟多晶金属材料的棘轮行为.但其基于 Armstrong 等<sup>[11]</sup>提出的非线性随动硬化模型来描述每个晶粒的棘轮运动,现已证实,该模型对材料的棘轮应变的预测值偏大;Kang 等<sup>[12]</sup>和罗娟等<sup>[13]</sup>利用类似于 Ohno-Abdel-Karim 模型的组合随动硬化律,构造新的循环本构模型来描述多晶材料的循环变形,对棘轮变形的预测取得了较好的效果.然而上述本构模型并未明确涉及到材料棘轮变形过程中位错结构的演化规律,为了揭示材料棘轮变形的位错演化机制,提高模型的预测能力,有必要建立包含更多位错机制的循环本构模型.

因此本文在各向同性硬化中,将位错分为刃位错和螺位错两部分,以刃位错和螺位错的增殖和湮灭作为基本的演化机制,同时考虑了位错之间的交互作用,引入经典修正的 Armstrong-Frederick 非线性随动硬化律,建立了适用于面心立方结构金属材料的基于位错密度的循环多晶粘塑性本构模型.应用提出的模型对典型面心立方结构多晶铜,在应变控制下的循环硬化行为和非对称应力控制循环下的棘轮行为进行模拟,将模拟结果和现有的实验数据<sup>[13-14]</sup>进行对比,验证了所提模型的合理性.

## 1 基于位错密度的循环本构模型

### 1.1 晶体塑性理论基础

在晶体塑性小变形理论框架下,总应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$

可以分解为弹性应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  和粘塑性应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$  两个部分.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} \quad (1)$$

对于面心立方结构晶体而言,材料的塑性变形主要是由主动滑移系统{111}〈110〉中位错的滑移引起的,塑性应变等于开动的各个滑移系的晶体位错滑移的总和.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{slip}^{vp} = \sum_{\alpha=1}^{n_{slip}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{n_{slip}}^{\alpha} \boldsymbol{P}^{\alpha} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{P}^{\alpha} = (\boldsymbol{m}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{n}^{\alpha} + \boldsymbol{n}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{m}^{\alpha})/2 \quad (3)$$

式中: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{slip}^{vp}$ 为粘塑性应变率; $\boldsymbol{P}^{\alpha}$ 为滑移系统的方向张量; $\boldsymbol{m}^{\alpha}$ 为滑移方向; $\boldsymbol{n}^{\alpha}$ 为滑动面的法线方向.

流动律给出了任意滑动系统中滑动剪切速率与剪切应力的关系<sup>[15]</sup>.

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{n_{slip}}^{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_0 \left| \frac{\boldsymbol{\tau}^{\alpha} - \boldsymbol{\chi}^{\alpha}}{S_T^{\alpha}} \right|^2 \text{sign}(\boldsymbol{\tau}^{\alpha} - \boldsymbol{\chi}^{\alpha}) \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{P}^{\alpha} \quad (5)$$

式中: $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{n_{slip}}^{\alpha}$ 为滑移系统的滑移剪切速率; $\boldsymbol{\tau}^{\alpha}$ 为 $\alpha$ 滑移系的分切应力; $\boldsymbol{\sigma}$ 为单晶中的局部应力张量; $\boldsymbol{\chi}^{\alpha}$ 和 $S_T^{\alpha}$ 分别为 $\alpha$ 滑移系的背应力和滑移阻力; $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_0$ 为参考滑移率; $m$ 为反映材料率相关性的参数.

### 1.2 滑移阻力的演化律

研究表明,在循环变形过程中,随着位错密度的增大,位错之间的交互作用越来越强,位错的滑移变得越来越难,导致晶体材料的硬化.本文基于广义泰勒定律,总滑移阻力 $S_T^{\alpha}$ <sup>[15-16]</sup>可以通过下式进行计算,即:

$$S_T^{\alpha} = \lambda \mu b \sqrt{\sum_{\beta=1}^N \boldsymbol{h}^{\alpha\beta} \rho_{\beta}^{\alpha}} \quad (6)$$

式中: $\mu$ 和 $b$ 分别为剪切模量和 Burgers 矢量的大小; $\lambda$ 为统计系数,其解释了与位错的规则空间排列的偏差; $\rho_{\beta}^{\alpha}$ 为位错总密度; $\boldsymbol{h}^{\alpha\beta}$ 为位错相互作用矩阵,定义为.

$$\boldsymbol{h}^{\alpha\beta} = \omega_1 + (1 - \omega_2) \delta_{\alpha\beta} \quad (7)$$

式中: $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 是相互作用系数; $\delta_{\alpha\beta}$ 为 Kronecker delta 函数.

### 1.3 位错密度的演化

将统计存储的位错总密度分解为刃位错和螺位错两部分.

$$\rho_T^{\alpha} = \rho_c^{\alpha} + \rho_s^{\alpha} \quad (8)$$

式中: $\rho_c^{\alpha}$ 为刃位错密度; $\rho_s^{\alpha}$ 为螺位错密度.为完善本构关系,本文把刃位错和螺位错的增殖和湮灭作为基本的演化机制,分别建立了两种位错密度的独立演化方程<sup>[15-16]</sup>.

$$\rho_c^\alpha = \frac{C_c}{b} \left[ K_c \sqrt{\sum_{\beta=1}^N \rho_{\Gamma}^\beta} - 2d_c \rho_c^\alpha \right] |\dot{\gamma}^\alpha| \quad (9)$$

$$\dot{\rho}_s^\alpha = \frac{C_s}{b} \left[ K_s \sqrt{\sum_{\beta=1}^N \rho_{\Gamma}^\beta} - \rho_s^\alpha \left\{ \pi K_s d_s^2 \sqrt{\sum_{\beta=1}^N \rho_{\Gamma}^\beta} + 2d_s \right\} \right] |\dot{\gamma}^\alpha| \quad (10)$$

式中:  $C_c$  和  $C_s$  分别表示刃位错和螺位错对滑移剪切率贡献大小的比例参数;  $K_c$  和  $K_s$  分别是控制位错迁移率的常数;  $d_c$  和  $d_s$  分别表示两个反平行的刃位错和螺位错之间发生相互湮灭的临界距离。

#### 1.4 随动硬化律

经典的 Armstrong-Frederick 随动硬化模型由于动态恢复项过强的缘故, 在非对称应力循环下对棘轮应变的预测值偏大<sup>[11]</sup>, 因此本文在该模型的基础上, 对动态回复系数进行修正, 修正后的演化律如下:

$$\dot{\chi}^\alpha = c\dot{\gamma}^\alpha - b\chi^\alpha |\dot{\gamma}^\alpha| \quad (11)$$

$$b = b_0 + (b_{\text{sat}} - b_0) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma_0}\right) \right] \quad (12)$$

式中:  $c$  为材料参数;  $b_0$  和  $b_{\text{sat}}$  分别为  $b$  的初始值和饱和值;  $\gamma_0$  为所有滑移系的累积滑移的参考值, 通过  $\gamma_0$  的大小可以调节参数  $b$  的演化速率;  $\gamma$  为所有滑移系的累积滑移量, 可由下式计算得到。

$$\gamma = \sum_{\alpha=1}^N \int_0^t |\dot{\gamma}^\alpha| dt \quad (13)$$

#### 1.5 尺度过渡准则

式(1)~式(13)构成了单晶基于位错密度的循环本构模型, 该模型可以描述面心立方单晶的循环变形行为, 为了获得多晶材料的循环变形行为, 需要引入一个有效的尺度过渡准则。本文采用由 Cailletaud 等<sup>[17]</sup>提出的显式尺度过渡准则, 命名为  $\beta$  准则。使用该过渡准则, 单晶体中的局部应力张量  $\sigma$  可由施加在多晶的均匀宏观应力张量  $\Sigma$  通过下式计算获得。

$$\sigma = \Sigma + C(\beta - \beta^g) \quad (14)$$

$$\dot{\beta}^g = \dot{\epsilon}_g^{\text{vp}} - D\beta^g \parallel \dot{\epsilon}_g^{\text{vp}} \parallel \quad (15)$$

式中:  $\Sigma$  为宏观应力张量; 下标  $g$  表示晶粒的局部变量;  $\beta = [\beta^g]$  表示对作用于晶体中的粘塑性应变张量  $\dot{\epsilon}_g^{\text{vp}}$  进行体积平均后, 可以得到多晶体聚合体的宏观塑性应变;  $C$  和  $D$  是尺度过渡的材料参数。

式(1)~式(15)在晶粒内和晶粒间尺度组成了基于位错密度的循环本构模型。下面将对新提出的模型的预测能力进行检验。

## 2 模拟结果

参考已完成的面心立方结构材料多晶铜的宏观

实验结果, 应用上述建立的基于位错密度的循环本构模型对多晶铜的单拉曲线、应变循环实验和非对称应力下的棘轮行为分别进行了模拟和预测, 以检验所提出模型的预测能力。

### 2.1 材料参数的确定

$E$  和  $\nu$  可由多晶铜的单轴拉伸曲线获得。流动准则中的参考滑移率  $\dot{\gamma}_0$  一般设置为  $0.001 \text{ s}^{-1}$ ,  $m$  反映材料粘性的参数, 值较大时, 模型描述的变形与接近率无关, 考虑加载速率的影响, 因此取值较小。总位错密度的初始值  $\rho_{\Gamma}^\alpha$  设置为大多数退火 FCC 单晶的典型值, 即  $\rho_{\Gamma}^\alpha = 1.6 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$ 。初始位错总体被认为是由等比例的刃位错和螺位错组成的, 因此  $\rho_c = \rho_s = 0.5\rho_{\Gamma}^\alpha$ 。式(6)中的统计系数  $\lambda$  基于 Kuhlmann-Wilsdorf 的工作<sup>[18]</sup>被赋值为 0.3。

考虑到不同滑移系之间的潜硬化和自硬化效应, 位错交互作用矩阵  $h^{\alpha\beta}$  的  $\omega_1$  和  $\omega_2$  分别为 1.5 和 1.2<sup>[19]</sup>。为反映刃位错和螺位错对滑动的贡献相同, 式(9)(10)中的参数  $C_c$  和  $C_s$  设置为 0.5。此外, 之前对紫铜<sup>[19]</sup>的滑动线测量结果表明, 刃位错的移动距离大约是螺位错的两倍。参数  $K_s$  为  $K_c$  的两倍, 即  $K_s = 2K_c$ ,  $d_s = 5d_c$ 。  $C$  和  $D$  可以参考文献[20]给出的取值范围。与随动硬化律相关的参数  $c$ 、 $b_0$ 、 $b_{\text{sat}}$  和  $\gamma_0$ , 可以由试错法通过非对称应力循环下的一条棘轮应变的演化曲线确定。所得到的多晶铜的材料参数如表 1 所示。

表 1 多晶铜的材料参数

Tab.1 Material parameters of polycrystalline copper	
分类	材料参数值
弹性常数	$E = 58.5 \text{ GPa}, \nu = 0.3$
流动准则	$\dot{\gamma}_0 = 0.001 \text{ s}^{-1}, m = 10$
随动硬化律	$c = 9.2 \times 10^{-3}, b_0 = 0.01, b_{\text{sat}} = 0.0, \gamma_0 = 0.01$
各向同性硬化律	$\lambda = 0.3, b = 0.257 \text{ nm}, C_c = C_s = 0.5,$ $K_c = 2.42 \times 10^{-4}, K_s = 4.85 \times 10^{-4}, d_c = 1.0 \text{ nm}, d_s = 5.0 \text{ nm},$ $\omega_1 = 1.5, \omega_2 = 1.2, \rho_c = \rho_s = 0.8 \times 10^{10} \text{ m}^{-2}$
尺度过渡准则	$C = 20 \text{ GPa}, D = 100$

### 2.2 多晶铜的模拟结果

图 1 为多晶铜在应变率为  $4 \times 10^{-3} / \text{s}$  下单拉曲线的模拟结果。由图 1 可见, 提出的模型能够较好地模拟多晶铜的单拉曲线。

应用提出的模型对多晶铜在对称应变控制循环下的应力应变曲线和响应的应力幅值进行了模拟, 应变幅值为  $\pm 0.3\%$ , 结果如图 2 所示。

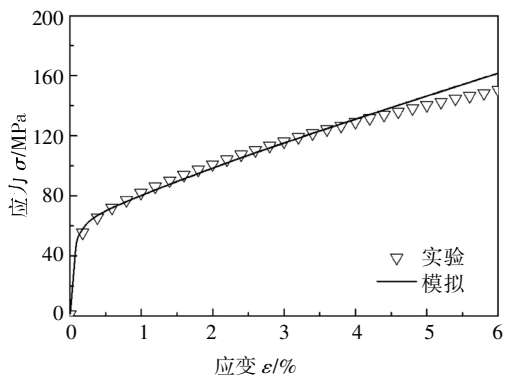
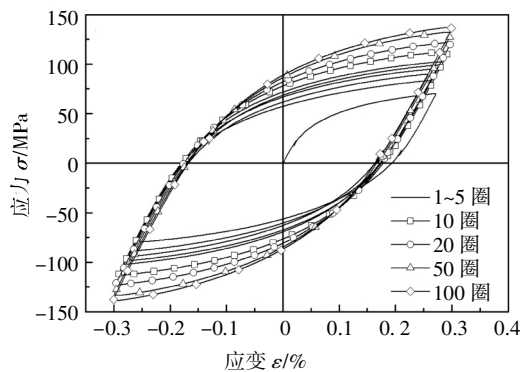
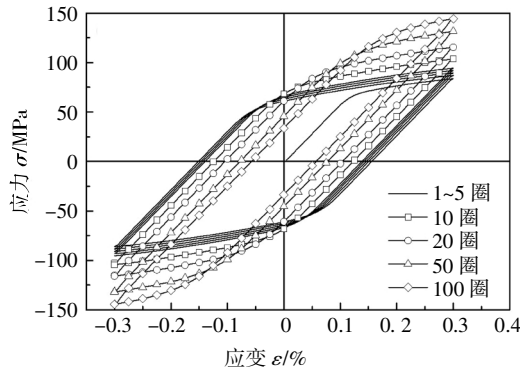


图 1 多晶铜的单拉模拟结果

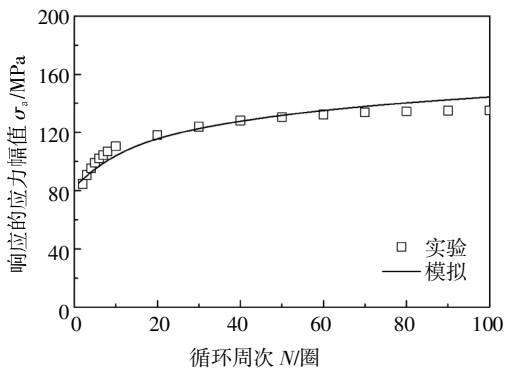
Fig.1 Simulation results of monotonic tensile curve of polycrystalline copper



(a) 实验的循环应力应变曲线



(b) 模拟的循环应力应变曲线

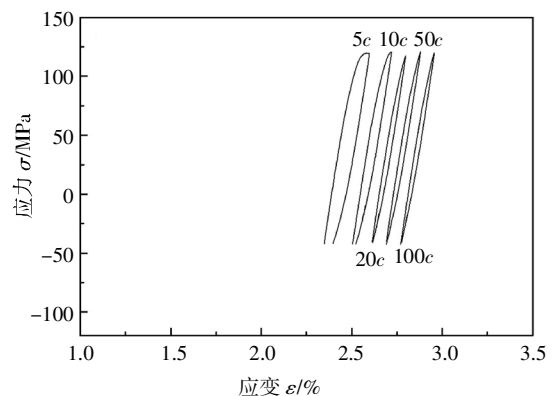


(c) 响应应力幅值模拟

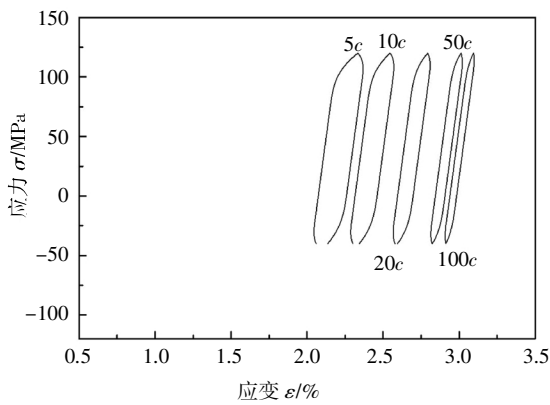
图 2 对称应变循环下多晶铜的循环硬化特性模拟  
Fig.2 Simulation results of cyclic hardening characteristics of polycrystalline copper under symmetric strain cycling

由图 2 可见, 提出的模型能够对材料响应的应力幅值随循环周次逐渐增加的现象给出合理的模拟, 也能模拟出循环硬化速率随循环周次逐渐降低的特性. 但是模拟的循环应力应变曲线在弹性到塑性过渡段没有实验的应力应变曲线光滑, 可能是由以下原因造成: 一是本文应用只包含一项修正的 Armstrong-Frederick 非线性随动硬化模型来模拟背应力的演化, 而非 Chaboche 模型<sup>[21]</sup>、Ohno-Wang 模型<sup>[22]</sup>或者 Ohno-Abdel-Karim 模型<sup>[23]</sup>包含了 3 项甚至更多项的非线性随动硬化律来模拟材料的应力应变循环曲线, 因此造成了模拟的循环应力应变曲线形状不够光滑; 二是本文通过显式尺度过渡准则把单晶的本构模型拓展到多晶尺度, 该尺度过渡准则不能准确地反映晶粒之间变形协调性. 后面的研究可以把本构方程编成 ABAQUS 用户子程序 Umat, 通过晶体塑性本构模型和有限元结合, 更加合理地考虑晶粒之间的相互作用, 来模拟材料的循环变形行为.

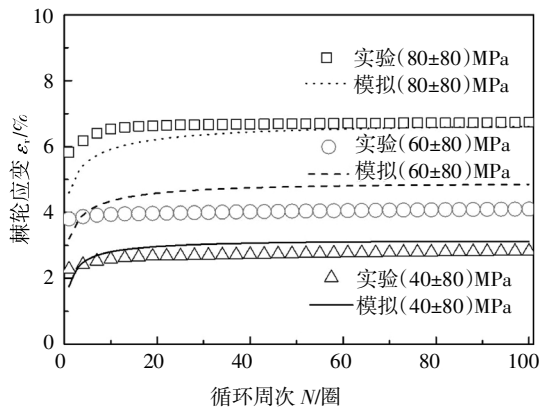
图 3(a)和图 3(b)给出了应力工况为(40±80) MPa 的应力应变滞回环的实验和模拟结果. 文中分别提取了应力应变滞回环的第 5 圈、第 10 圈、第 20 圈、第 50 圈和第 100 圈, 其中 *c* 表示循环的圈数. 由于多晶铜为循环硬化材料, 应力应变滞回环曲线随着循环周次的增加逐渐变窄, 在经过一定的循环周次后, 滞回环的大小基本保持不变. 与本文提出的模型(模拟应力应变滞回环的演化规律和实验的规律)是一致的, 体现出多晶铜的循环硬化特征. 图 3(c)和图 3(d)给出了多晶铜在不同平均应力和应力幅值下棘轮应变的演化曲线, 新提出的模型能够对棘轮应变和棘轮应变率的演化给出合理的预测, 即棘轮应变会随着循环周次的增加而增大, 而棘轮应变率会逐渐降低, 最后保持为一个接近于零的常数. 同时新模型也能够合理地预测应力幅值和平均应力对棘轮变形的影响, 即棘轮应变会随着应力幅值和平均应力的增加而增大.



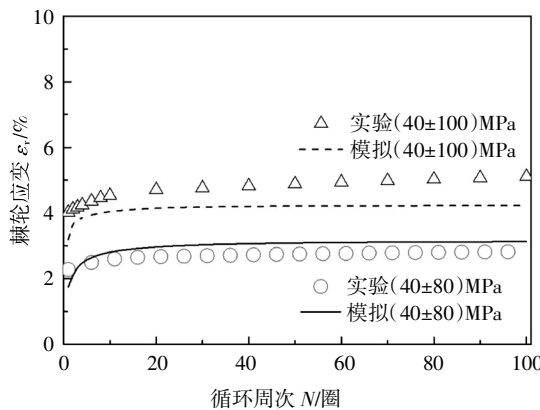
(a) 实验的应力应变滞回环曲线((40±80)MPa)



(b)模拟的应力应变滞回环曲线((40±80) MPa)



(c)不同平均应力棘轮应变演化



(d)不同应力幅值下棘轮应变演化

图3 非对称应力循环下多晶铜的棘轮应变的模拟结果

Fig.3 Simulation results of ratchetting strain of

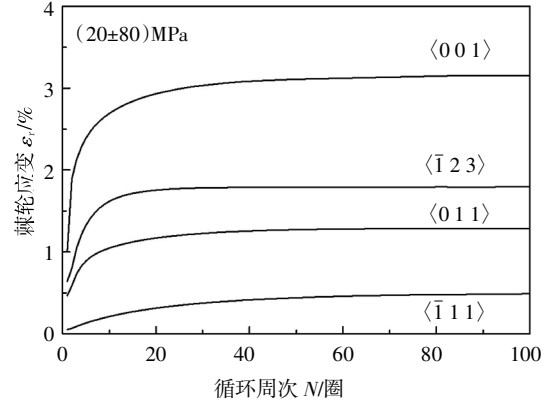
polycrystalline copper under asymmetrical stress cycling

### 2.3 单晶铜的预测结果

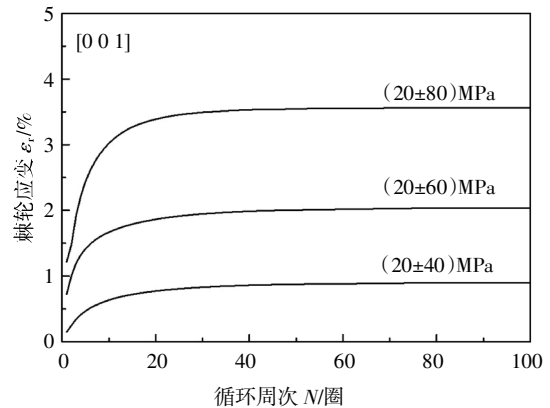
提出的本构模型是在单晶水平上建立的, 利用显式尺度过渡准则, 即  $\beta$  准则拓展到多晶尺度. 本文应用表 1 中的材料参数, 对单晶铜在平均应力非零的应力循环下的棘轮变形的演化曲线进行了预测, 给出的定性的预测结果如图 4 所示.

图 4(a)为单晶铜在不同晶体学位向的棘轮应变的预测结果. 由图可见, 新提出的模型可以对不同晶

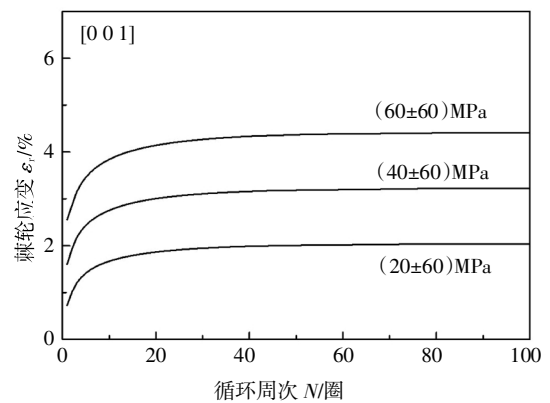
体学位向的棘轮行为进行预测. 图 4(b)和图 4(c)为单晶铜在晶向上不同应力工况下的单轴棘轮行为的预测结果, 可以看出新模型能够合理预测棘轮行为对应力幅值和平均应力的依赖性.



(a)单晶铜在不同晶向的棘轮变形的预测结果



(b)晶向不同应力幅值的棘轮变形的预测结果



(c)晶向不同平均应力的棘轮变形的预测结果

图4 单晶铜的棘轮应变的预测结果

Fig.4 Prediction results of the ratchetting strain of single crystal copper

### 3 结论

本文通过把刃位错和螺位错的演化规律引入到各向同性硬化律, 采用修正的 Armstrong-Frederick

非线性随动硬化模型和显式的尺度过渡准则,建立了基于位错密度的循环多晶粘塑性本构模型,并应用该模型对面心立方结构多晶铜的循环变形行为进行模拟.结果显示,新发展的模型不仅可以模拟紫铜在对称应变循环下的循环硬化特性,还可以模拟紫铜在不同应力水平下的棘轮行为.同时单晶形式的本构模型也能够对不同晶向和不同应力水平下的棘轮行为进行合理的预测.

## 参考文献

- [1] OHNO N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic plasticity and viscoplasticity [J]. *Applied Mechanics Review*, 1990, 43(11): 283—295.
- [2] KANG G. Ratchetting: recent progresses in phenomenon observation, constitutive modeling and application [J]. *International Journal of Fatigue*, 2008, 30(8): 1448—1472.
- [3] CHABOCHE J L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories [J]. *International Journal of Plasticity*, 2008, 24(10): 1642—1693.
- [4] BARI S, HASSAN T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation [J]. *International Journal of Plasticity*, 2002, 18(7): 873—894.
- [5] ZHAO W, YANG S, WEN G, *et al.* Fractional-order visco-plastic constitutive model for uniaxial ratcheting behaviors [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2019, 40(1): 49—62.
- [6] FEAUGAS X, GAUDIN C. Ratchetting process in the stainless steel AISI 316L at 300 K: an experimental investigation [J]. *International Journal of Plasticity*, 2004, 20(4/5): 643—662.
- [7] KANG G, DONG Y, WANG H, *et al.* Dislocation evolution in 316L stainless steel subjected to uniaxial ratcheting deformation [J]. *Materials Science & Engineering A (Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing)*, 2010, 527 (21/22): 5952—5961.
- [8] DONG Y, KANG G, LIU Y, *et al.* Dislocation evolution in 316 L stainless steel during multiaxial ratchetting deformation [J]. *Materials Characterization*, 2012, 65: 62—72.
- [9] XU B, JIANG Y. A cyclic plasticity model for single crystals [J]. *International Journal of Plasticity*, 2004, 20(12): 2161—2178.
- [10] CAILLETAUD G, SAI K. A polycrystalline model for the description of ratchetting: effect of intergranular and intragranular hardening [J]. *Materials Science & Engineering A (Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing)*, 2008, 480 (1/2): 24—39.
- [11] ARMSTRONG P J, FREDERICK C O. A mathematical representation of the multiaxial baushinger effect [J]. *Materials at High Temperatures*, 1966, 24(1): 1—26.
- [12] KANG G, BRUHNS O T, SAI K. Cyclic polycrystalline visco-plastic model for ratchetting of 316L stainless steel [J]. *Computational Materials Science*, 2011, 50(4): 1399—1405.
- [13] 罗娟, 康国政, 董亚伟, 等. 多晶铜和铝单轴棘轮行为的循环晶体塑性本构模拟 [J]. *工程科学与技术*, 2012, 44(s2): 80—83.  
LUO J, KANG G Z, DONG Y W, *et al.* Modeling for ratchetting of polycrystalline copper and aluminum by cyclic crystal plasticity [J]. *Advanced Engineering Sciences*, 2012, 44 (s2): 80—83. (In Chinese)
- [14] 肖雄. 多晶铜单轴棘轮效应的实验和晶体塑性本构模型研究 [D]. 南京: 南京理工大学理学院, 2018: 10—17.  
XIAO X. Experimental study on uniaxial ratcheting effect and crystal plastic constitutive model of polycrystalline copper [D]. Nanjing: School of Science, Nanjing University of Science and Technology, 2018: 10—17. (In Chinese)
- [15] CHEONG K S, BUSSO E P. Discrete dislocation density modelling of single phase FCC polycrystal aggregates [J]. *Acta Materialia*, 2004, 52(19): 5665—5675.
- [16] ABD E A A, XU Y, SANGYUL H, *et al.* Computational homogenization of tensile deformation behaviors of a third generation Al—Li alloy 2060—T8 using crystal plasticity finite element method [J]. *Materials Science and Engineering: A*, 2018, 731: 583—594.
- [17] CAILLETAUD G, PILVIN P. Utilisation de modèles polycristallins pour le calcul par éléments finis [J]. *Revue Européenne Des Éléments Finis*, 1994, 3(4): 515—541.
- [18] KUHLMANN—WILSDORF D. Theory of plastic deformation: properties of low energy dislocation structures [J]. *Materials Science & Engineering A (Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing)*, 1989, 113: 1—41.
- [19] MADER S. Elektronenmikroskopische untersuchung der gleitlinienbildung auf kupfereinkristallen [J]. *Zeitschrift Für Physik* 1957, 149: 73—102.
- [20] 董亚伟. 多晶金属棘轮行为的微观机理及相关本构模型研究 [D]. 成都: 西南交通大学力学与工程学院, 2014: 79—103.  
DONG Y W. Study on the mechanism of ratchetting of polycrystalline materials and corresponding constitutive model [D]. Chengdu: School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, 2014: 79—103. (In Chinese)
- [21] CHABOCHE J L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects [J]. *International Journal of Plasticity*, 1991, 7(7): 661—678.
- [22] OHNO N, WANG J D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I: formulation and basic features for ratchetting behavior [J]. *International Journal of Plasticity*, 1993, 9(3): 375—390.
- [23] ABDEL—KARIM M, OHNO N. Kinematic hardening model suitable for ratchetting with steady-state [J]. *International Journal of Plasticity*, 2000, 16(3): 225—240.