文章编号：1674-2974(2016)11-0086-09

临坡矩形浅基础地基极限承载力的上限分析*

曹文贵[1†]，袁青松[1]，胡卫东[1,2]

（1. 湖南大学 岩土工程研究所，湖南 长沙　410082；2. 湖南理工学院 土木建筑工程学院，湖南 岳阳　414000）

摘　要：为深入探讨临坡矩形浅基础地基的破坏机理，提出一种三维双侧破坏模式，该破坏模式充分考虑了基础内侧土体抗剪强度对临坡地基承载力的影响，且能较好反映基础两侧滑块形状和尺寸的非对称性. 同时对该多滑块组合破坏机构提出一种简化构造方法，该方法既能有效反映矩形基础地基的三维端部效应，又能避免复杂的坐标求解和曲面积分运算，更便于工程实际的应用. 然后，在该破坏模式基础上引入极限分析上限理论，建立出一种新的临坡矩形基础地基承载力确定方法，并运用 SQP 优化算法实现极限承载力上限求解. 最后，结合工程实例，与现有其他理论研究方法和 ABQUS 有限元分析方法计算结果进行对比分析，验证了本文方法的可行性和合理性.

关键词：极限承载力；临坡地基；矩形基础；上限分析

中图分类号：U416.14　　　**文献标识码**：A

Upper Bound Solution for Ultimate Bearing Capacity of the Shallow Rectangular Footings Adjacent to Slope

CAO Wen-gui[1], YUAN Qing-song[1], HU Wei-dong[1,2]

(1. Geotechnical Engineering Institute, Hunan University, Changsha　410082, China;
2. College of Civil Engineering and Architecture, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang　414000, China)

Abstract: In order to make an intensive study of the failure mechanism of rectangular footings adjacent to slope, a three-dimensional and bilateral failure mode was established, which fully considered the influence of the shear strength of inside soil in the foundation and the double asymmetrical features. Moreover, a simplified construction method of the rigid-motion blocks collapse mechanism was proposed, which could not only effectively reflect the three-dimensional end effect but also avoid complex coordinate and surface integral calculation, and it is more convenient for practical engineering. Based on the failure mode, the upper limit analysis theory was then introduced, and a new analysis approach of ultimate bearing capacity of rectangular footing adjacent to slope was put forward. Meanwhile, the solving of the bearing capacity was realized by using the SQP optimization theory. Finally, the feasibility and rationality of the research approach proposed is showed through the comparison analysis with the current research as well as the ABQUS finite element results.

Key words: ultimate bearing capacity; ground foundation adjacent to slope; rectangular footings; upper limit analysis

---

* **收稿日期**：2015-11-27

基金项目：国家自然科学基金资助项目(51378198)，National Natural Science Foundation of China(51378198)；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20130161110017)

作者简介：曹文贵(1963－)，男，湖南南县人，湖南大学教授，博士生导师

†通讯联系人，E-mail：cwglyp@21cn.com

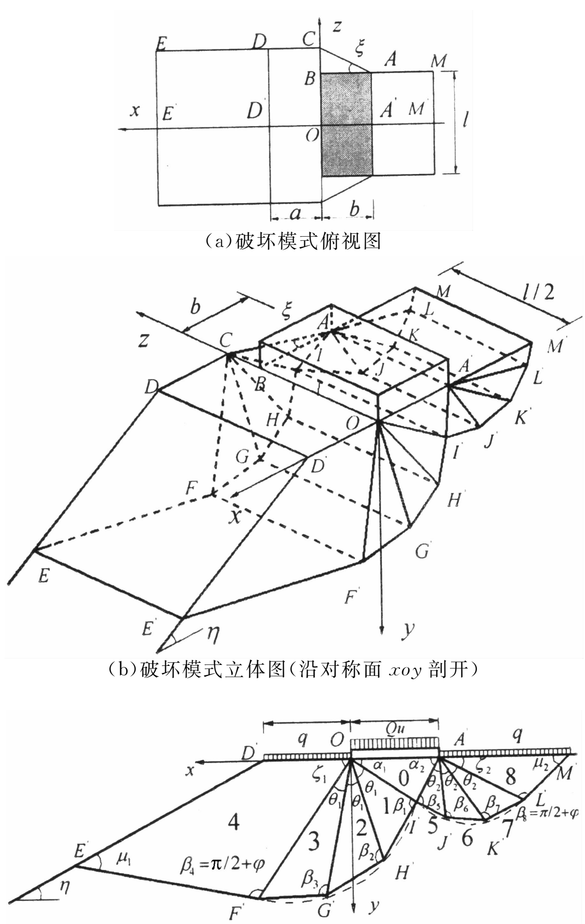
目前,矩形浅基础地基承载能力的研究成果相对较少,且大部分主要集中在水平半无限空间范围内[1-2],有关临坡矩形基础地基承载力确定方法研究的开展尚不能适应实际工程需要,其问题主要表现在以下几个方面:第一,临坡矩形基础地基具有明显的三维端部效应,相比临坡条形基础地基承载力问题更加复杂,建立的破坏模式须充分考虑滑块体端部滑动面对地基承载力的贡献;第二,受边坡存在的影响,临坡矩形基础地基破坏模式与平地基显著不同,具有非对称破坏性,即滑块大小和几何形状的非对称性;第三,已有方法采用单侧滑动破坏模式所得承载力结果偏于保守,临坡地基在坡度较小或边坡距较大时,须考虑基础内侧土体抗剪强度对承载力的影响[3-9].以上三点是构建合理临坡矩形基础地基破坏模式,开展极限承载力确定方法研究的关键,也是本文研究须重点解决的问题.

近年来,临坡矩形浅基础地基极限承载力确定方法的研究已取得了一些进展,但仍然存在许多问题和不足,如 Azzouz[10] 等对比分析了条形荷载和矩形荷载作用下的临坡地基承载力,结果表明临坡矩形基础地基承载力较条形基础有很大提高,但其选用的破坏模式过于简化且未考虑内摩擦角的影响;Michalowski[11] 提出了临坡矩形基础地基经离散化处理后的多滑块组合单侧破坏模式,Farzaneh[12] 等通过增加构成侧滑动面滑块体的个数对该破坏模式进行改进,使其更接近实际情况,但该方法需要通过求解坐标来构建端部滑动面,造成大量的坐标求积运算,因而较难运用于工程实际;Buhan[13] 等提出了一种假定基础端部土体同时产生滑动破坏的"冲模"破坏模式,但其破坏模式并不能充分反映边坡地基的受力特点,且未考虑基础埋深的影响;Ganjian[14] 等提出了由一个螺旋底面和若干侧面组成的临坡矩形基础单侧滑动破坏模式,但由于其极限承载力分析模型涉及到复杂的积分运算,尚难应用到实际工程中;王红雨[15] 等提出了临坡矩形基础三维机动许可破坏模式,充分考虑了三维效应和端部效应,但其滑块端部的构造形式仍未能较好反映工程实际,且其所求上限解并不是严格意义上的上限解.综上所述,目前在构建临坡矩形基础地基三维破坏模式和机构时,滑块体端部滑动面构造方法仍不能做到简单有效,而且其地基承载力破坏模式主要集中于采用单侧破坏模式,没有合理考虑基础内侧土体抗剪强度对临坡地基承载力的贡献,存在一定局限性,需要进一步改进和完善.

为此,本文将从临坡矩形基础地基破坏模式研究入手,重点考虑临坡地基破坏模式的双侧非对称性和矩形基础的三维端部效应影响,同时引入极限分析理论和优化分析方法[16],深入探讨临坡矩形浅基础地基极限承载力确定新方法.

1　临坡矩形基础地基破坏模式

本文借鉴现有临坡地基承载力研究成果[1-15],基于下列临坡矩形基础地基的具体工程条件,即:①边坡为均质土坡;②坡面为斜平面,坡面无荷载作用,坡角为 η;③坡顶水平且沿远离边坡一侧有足够的长度;④边坡有足够的高度且临坡一侧土滑块体始终沿坡面滑出;⑤矩形基础作用在坡顶上且长边平行于坡顶线,在基础顶面作用竖直向下的均布荷载,确定出由多个滑块体组成的双侧三维破坏模式,如图 1 所示.该破坏模式主要适用于边坡坡度不大或边坡距较大的临坡矩形基础地基.



(a)破坏模式俯视图

(b)破坏模式立体图(沿对称面 xoy 剖开)

(c)xoy 剖面图

图 1　临坡矩形基础地基破坏模式

Fig. 1　A failure mode for rectangular footings adjacent to slope

为了能更好地研究该问题,假定地基土为服从 Mohr-Coulomb 屈服准则和相关联流动法则的均质理想塑性材料,内摩擦角为 φ,粘聚力为 c,不考虑孔隙水的影响,土的有效重度为 γ,并将基础埋深 h 的影响作用等效为均布超载 q,如式(1)所示

$$q = \gamma h \tag{1}$$

临坡矩形基础地基双侧破坏机构由 9 个刚性滑块体组成,为了方便研究,首先将各滑块进行编号,如图 1(c)所示,基础底部滑块为 0 号滑块,与之相邻的沿边坡方向的各滑块体编号依次为 1,2,3,4,沿远离边坡一侧(基础内侧)方向滑动的各滑块体编号依次为 5,6,7,8.

0 号滑块是构造本文破坏模式的关键,该滑块体为主动滑块,剖面 $OA'I'$ 的形状为三角形,由于受土体自重和边坡存在的综合影响[17-18],三角形 $OA'I'$ 两个底角 α_1 与 α_2 大小可变且不相等,再考虑到基底与地基土体之间的摩擦影响,因此可规定 $\alpha_1 \in [\varphi, \pi/4+\varphi/2]$,$\alpha_2 \in [\varphi, \pi/4+\varphi/2]$,且 $\alpha_1 > \alpha_2$.同时为了更合理地考虑矩形基础的三维端部效应,本文借鉴现有的三维滑块体端部滑动面的构造处理方法[19-20],提出一种更能较好反映工程实际的端部滑块体构造形式,即假定边 0 号块体的端部滑动面 CAI 与边坡顶面的交线 AC 从矩形基础内侧底角 A 开始向边坡一侧延伸,AC 与基础短边 AB 所成夹角为 ξ,CI 与 OI' 平行,如图 1(b)所示.因为在面 CAI 上满足联流动法则,所以 0 号滑块的速度方向与面 CAI 成夹角 φ 并指向滑块体内侧.

1~3 号滑块和 5~7 号滑块的底部滑动面(实线部分)均由对数螺旋面离散而得,如图 1(c)所示,虚线为被离散的对数螺线可表示为

$$r = r_0 e^{\theta \tan\varphi} \tag{2}$$

式中:r 为滑移线上的计算点到对数螺线原点的向量半径,r_0 为对数螺线的起始向量半径,θ 为计算点向量半径与起始向量半径之间的夹角.各滑块的截面为三角形,1~3 号滑块顶角均为 θ_1,右侧底角分别为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,5~7 号滑块顶角均为 θ_2,左侧底角分别为 $\beta_5, \beta_6, \beta_7$.

4 号和 8 号滑块体在相邻滑块体的挤压下分别沿着对数螺线 $I'F'$ 和 $I'L'$ 的切线方向向两侧发生平移滑动,形成连续滑动面 $EE'FF'$ 和 $LL'MM'$.

现有的研究方法[11,15]在构建滑块体侧滑面时,通常需要分别求解滑块体的各顶点坐标(用各未知参量表示),使得计算过程中出现大量的坐标迭代运算和坐标求积运算,求解过程极其繁琐复杂,计算结果可靠性也较难保证,更不便于在工程实际中应用.为此,本文针对这一问题在滑块体侧滑面的构建方法上进行了简化和改进,假定滑块体的侧滑面 $CDEFGHI$ 和 $AJKLM$ 分别与剖面 $OD'E'F'G''I'$ 和 $A'J'K'L'M'$ 平行.这种简化处理方法无需进行复杂的坐标求积运算即可确定出各滑块体侧滑面的形状和尺寸,使得求解过程简便可行,通过后面的工程实例亦可验证本文破坏模式简化处理方法在计算结果的准确性和精度上都能够满足工程实际应用要求.

以上即为本文确定的临坡矩形基础地基的多滑块双侧三维破坏模式,破坏机构的几何模型主要由 11 个可变角参量 $\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ 和 ξ 确定,该破模式充分考虑了滑动面的双侧非对称性和三维端部效应的影响作用.

根据图 1 所示几何关系即可求出各滑块体积 V 和面积 S 等几何参量,具体内容如下.

首先,为了便于表述,用 V_k $(k=1,2,\cdots,8)$表示各滑块的体积,S_k $(k=1,2,\cdots,8)$表示 1~8 号滑块底部滑动面面积,S'_k $(k=0,1,\cdots,8)$表示 0~8 号滑块的侧滑面(端部滑动面)面积,S''_k $(k=1,2,\cdots,8)$表示相邻两滑块之间的速度间断面的面积.如 1 号滑块的体积为 V_1,底部滑动面 $HH'II'$ 面积为 S_1,侧滑面 CHI 为 S'_1,0 号和 1 号滑块之间的速度间断面 $COII'$ 面积为 S''_1,然后沿边坡方向依次为 S''_2,S''_3, S''_4,1 号和 2 号滑块之间的速度间断面 $AA'II'$ 面积为 S''_5,然后沿远离边坡一侧方向依次为 S''_6,S''_7, S''_8,具体计算过程如下:

各滑块底滑面的面积 S_k 分别为

$$S_{k(k=1,2,3)} = \frac{b(l+b\tan\xi)e^{k\theta_1\tan\varphi}\sin\alpha_1\sin\theta_1}{2\sin\beta_k\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{3}$$

$$S_{k(k=5,6,7)} = \frac{bl\,e^{(k-4)\theta_2\tan\varphi}\sin\alpha_2\sin\theta_2}{2\sin\beta_{k+1}\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{4}$$

$$S_8 = \frac{-bl\,e^{\theta_2\tan\varphi}\sin\alpha_2\sin(\alpha_1+3\theta_2)}{2\sin\beta_{k+1}\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1+3\theta_2-\varphi)} \tag{5}$$

式中:l 和 b 分别为矩形基础的长度和宽度;α_1, α_2,$\theta_1, \theta_2, \beta_k$ $(k=1,2,3,5,6,7)$,ξ 均为可变角参量(见图 1),以下各式与此相同.

4 号滑块底部滑动面面积 S_4 利用图 2 所示几何关系求解:

当 $\alpha_2+3\theta_1-(\pi/2+\varphi)>0$ 时,即 $E'F'$ 位于过点 F' 的虚线上部时有

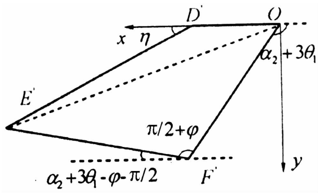


图 2　剖面 $OD'E'F'$ 几何关系

Fig. 2　A geometry relation of the $OD'E'F'$ section

x 方向：

$$a + D'E'\cos\eta = OF'\cos(\pi - \alpha_2 - 3\theta_1) + E'F'\cos(\alpha_2 + 3\theta_1 - \varphi - \pi/2) \tag{6}$$

式中：a 为边坡距，见图 1(a)．

y 方向：

$$D'E'\sin\eta + E'F'\sin(\alpha_2 + 3\theta_1 - \varphi - \pi/2) = OF'\sin(\pi - \alpha_2 - 3\theta_1) \tag{7}$$

以上两式联立可得：

$$E'F' = \frac{-a\sin\eta + OF'\sin(\alpha_2 + 3\theta_1 + \eta)}{\cos(\alpha_2 + 3\theta_1 + \eta - \varphi)} \tag{8}$$

$$D'E' = \frac{E'F'\cos(\alpha_2 + 3\theta_1 - \varphi) + OF'\sin(\alpha_2 + 3\theta_1)}{\sin\eta} \tag{9}$$

其中 OF' 可由对数螺线方程(2)求得

$$OF' = \frac{b e^{3\theta_1}\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{10}$$

当 $\alpha_2 + 3\theta_1 - (\pi/2 + \varphi) < 0$ 时与上述结果相同．则由以上条件可求出 S_4

$$S_4 = \frac{-(l/2 + b\tan\xi)(a\sin\eta + O'F'\sin(\alpha_2 + 3\theta_1 + \eta))}{\cos(\alpha_2 + 3\theta_1 + \eta - \varphi)} \tag{11}$$

各滑块侧滑面的面积 S_k' 分别为

$$S_0' = \frac{1}{2}|\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AI}| = \frac{b^2\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}\sqrt{\tan^2\xi + \sin^2\alpha_2} \tag{12}$$

$$S'_{k(k=1,2,3)} = \frac{b^2\sin^2\alpha_1\sin\theta_1}{2\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{(2k-1)\theta_1\tan\varphi} \tag{13}$$

S_4' 可根据图 2 所示几何关系求出，即

$$S_4' = S_{OD'E'} + S_{OE'F'} = \frac{1}{2}(F'E' \times F'O\cos\varphi + aD'E'\sin\eta) \tag{14}$$

$$S_5' = \frac{1}{2}|\boldsymbol{AI} \times \boldsymbol{AJ}| = \frac{b^2 e^{\theta_2\tan\varphi}\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha_2\sin^2\theta_2}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \tan^2\xi} \tag{15}$$

$$S'_{k(k=6,7)} = \frac{b^2\sin^2\alpha_2\sin\theta_2}{2\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{(2k-9)\theta_2\tan\varphi} \tag{16}$$

$$S_8' = \frac{-b^2 e^{6\theta_2\tan\varphi}\cos\varphi\sin^2\alpha_2\sin(\alpha_1 + 3\theta_2)}{2\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 + 3\theta_2 - \varphi)} \tag{17}$$

根据图 1 和图 2 所示几何关系求得相邻滑块之间速度间断面的面积 S_k'' 分别为

$$S_1'' = \frac{b(l + b\tan\xi)\sin\alpha_1}{2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{18}$$

$$S''_{k(k=2,3,4)} = \frac{b(l/2 + b\tan\xi)\sin\alpha_1 e^{(k-1)\theta_1}}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{19}$$

$$S_5'' = \frac{bl\sin\alpha_2}{2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{20}$$

$$S''_{k(k=6,7,8)} = \frac{bl\sin\alpha_2 e^{(k-5)\theta_1\tan\varphi}}{2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{21}$$

同理，经过简单的几何运算即可求出各滑块的体积 V_k 分别为

$$V_0 = \frac{b^2 l\sin\alpha_1\sin\alpha_2(3l + 2b\tan\xi)}{12\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{22}$$

$$V_{k(k=1,2,3)} = \frac{b^2 e^{(2k-1)\theta_1\tan\varphi}(l/2 + b\tan\xi)\sin^2\alpha_1\sin\theta_1}{2\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{23}$$

$$V_4 = \frac{1}{2}S_4'(l/2 + b\tan\xi) \tag{24}$$

$$V_5 = \frac{b^2(3l + 2b\tan\xi)e^{\theta_2\tan\varphi}\sin^2\alpha_2\sin\theta_2}{12\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{25}$$

$$V_{k(k=6,7)} = \frac{b^2 l e^{(2k-9)\theta_2\tan\varphi}\sin^2\alpha_2\sin\theta_2}{4\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{26}$$

$$V_8 = \frac{-b^2 l e^{6\theta_2\tan\varphi}\cos\varphi\sin^2\alpha_2\sin(\alpha_1 + 3\theta_2)}{4\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 + 3\theta_2 - \varphi)} \tag{27}$$

至此，已构建出临坡矩形基础地基多滑块组合的几何破坏模型，为本文后面采用极限分析方法确定临坡矩形基础地基极限承载力奠定了坚实基础．

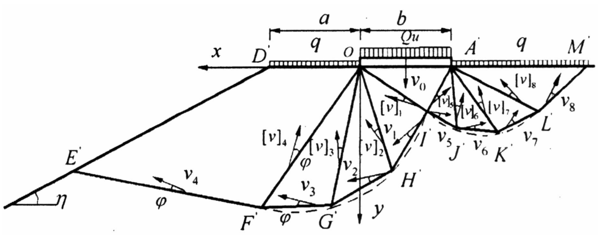
2　机动许可速度场的构建

在上述提出的临坡矩形基础地基多滑块组合破坏模型的基础上，必须先构建出机动许可的速度矢量场，才能运用极限分析上限法进一步探讨临坡矩形基础地基承载力的确定方法．为此，结合本文所提出的破坏机构的特点并在下述假定的基础上建立如图 3 所示的机动允许速度场，假设如下：

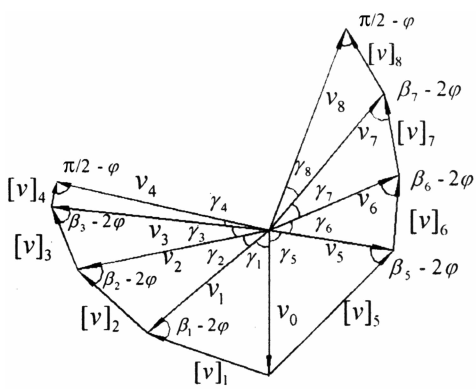
1)假设基础为刚性基础且与地基之间无相对滑动，在 Q_u 作用下基础以速度 v_0 垂直向下运动，即 0 号滑块速度为 v_0．

2)假设边坡地基在 Q_u 作用下发生的破坏主要为滑动(平动)破坏，而不考虑转动破坏的影响．

3)假设所有的滑块体均为刚性滑块.



(a)破坏模式对应速度场



(b)速度矢量关系图

图 3　机动许可速度场

Fig. 3　Velocity field of motor permit

由 Mohr-Coulomb 屈服准则和相关联流动法则可知,在速度间断面上,速度增量的方向与间断面的夹角始终保持为土的内摩擦角 φ,如图 3(a)所示. 根据速度场的构建准则[21]可得如图 3(b)所示破坏机构的速度矢量关系,进而由速度矢量三角函数关系就可以推导出各滑块的速度 v_k ($k=1,2,\cdots,8$)和各相邻滑块之间的间断速度$[v]_k$.

0～4 号滑块的速度和滑块的间断速度分别为:

$$v_1 = v_0 \cdot \frac{\cos(\alpha_2 - \varphi)}{\sin(\beta_1 - 2\varphi)} \tag{28}$$

$$v_{k(k=2,3,4)} = v_{k-1} \cdot \frac{\sin(\theta_2 - \beta_{k-1} - 2\varphi)}{\sin(\beta_k - 2\varphi)} \tag{29}$$

$$[v]_{k(k=1,2,3,4)} = v_{k-1} \cdot \frac{\sin \gamma_k}{\sin(\beta_k - 2\varphi)} \tag{30}$$

5～8 号滑块的速度和滑块间的间断速度分别为:

$$v_5 = v_0 \cdot \frac{\cos(\alpha_1 - \varphi)}{\sin(\beta_5 - 2\varphi)} \tag{31}$$

$$v_{k(k=6,7,8)} = v_{k-1} \cdot \frac{\sin(\theta_2 + \beta_{k-1} - 2\varphi)}{\sin(\beta_k - 2\varphi)} \tag{32}$$

$$[v]_5 = v_0 \cdot \frac{\sin \gamma_5}{\sin(\beta_5 - 2\varphi)} \tag{33}$$

$$[v]_{k(k=6,7,8)} = v_{k-1} \cdot \frac{\sin \gamma_k}{\sin(\beta_k - 2\varphi)} \tag{34}$$

在上述(30),(33)和(34)速度关系式中,γ_k 表示相邻两滑块的速度矢量夹角,其大小分别为:

$$\gamma_1 = \pi/2 + \alpha_2 + \varphi - \beta_1 \tag{35}$$

$$\gamma_{k(k=2,3,4)} = \theta_1 + \beta_{k-1} - \beta_k \tag{36}$$

$$\gamma_5 = \pi/2 + \alpha_1 + \varphi - \beta_5 \tag{37}$$

$$\gamma_{k(k=6,7,8)} = \theta_2 + \beta_{k-1} - \beta_k \tag{38}$$

由于 $E'F'$ 和 $L'M'$ 分别为两对数螺线沿切线方向的延长线,所以其与对数螺线向量半径 OF' 和 $A'L'$ 的夹角均为已知,其值为:

$$\beta_4 = \beta_8 = \pi/2 + \varphi \tag{39}$$

考虑到所构建的破坏模式必须是机动许可的,因此必须满足以下基本约束条件:

$$0 < \beta_k - 2\varphi < \pi, (k = 1,2,3,\cdots,8) \tag{40}$$

$$0 < \zeta_1 = \pi - 3\theta_1 - \alpha_2 < \pi/2 + \eta - \varphi \tag{41}$$

$$0 < \zeta_2 = \pi - 3\theta_2 - \alpha_1 < \pi/2 - \varphi \tag{42}$$

$$0 < \mu_1 = \eta + \alpha_2 + 3\theta_1 - \varphi - \pi/2 < \pi/2 \tag{43}$$

$$0 < \mu_2 = \alpha_1 + 3\theta_2 - \varphi - \pi/2 < \pi/2 \tag{44}$$

式(41)～(44)中 $\zeta_1, \zeta_2, \mu_1, \mu_2$ 为已知夹角,见图 1(b).

并且在 0 号滑块端部滑面 CAI 上满足联流动法则,即 0 号滑块的速度 v_0 方向与面 CAI 成夹角 φ 并指向滑块体内侧,于是应满足以下约束条件

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{v}_0 = |\boldsymbol{n}_0||\boldsymbol{v}_0| \sin \varphi \tag{45}$$

式中:$\boldsymbol{n}_0$ 为侧滑面 CAI 指向内侧的法向向量,可由图 1 所示几何关系求出,$\boldsymbol{v}_0$ 为 0 号滑块速度的方向向量.

$$\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AI} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{v}_0 = (0,1,0) \tag{47}$$

则式(45)可转化为如下约束方程:

$$\cos \alpha_2 \tan \xi - \sin \varphi \sqrt{\tan^2 \xi + \sin^2 \alpha_2} = 0 \tag{48}$$

3　临坡地基极限承载力上限分析

根据极限分析上限理论[22],对于任意一个给定的机动许可的速度场,外力所做的虚功功率与物体内能耗散率相等. 于是,基于本文前面提出的由多个角变量确定的临坡矩形基础地基承载力分析模型,利用极限分析上限方法即可确立出临坡矩形基础地基极限承载力计算方法,具体过程如下:

3.1　外力做功功率

在本文提出的临坡矩形基础地基承载力分析模型中,所作用的外力主要包括极限荷载 Q_u 、等效均

布力 q 和各滑体的自重力 W,其功率分别为

1)均布力 q 做功功率 W_q

$$W_q = qv_{4y}S_a + qv_0 S_b + qv_{8y}S_c \tag{49}$$

式中:v_{4y}和 v_{8y}分别为 4 号和 8 号滑块沿 q 作用方向(y 轴方向)的速度分量;S_a,S_b 和 S_c 分别表示均布力 q 的作用面 $CODD'$,ABC 和 $AA'MM'$ 的面积,由已知条件可得

$$v_{4y} = v_4 \cos(\alpha_2 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \tag{50}$$

$$v_{8y} = v_8 \cos(\alpha_1 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \tag{51}$$

$$S_a = \frac{a}{2}(l/2 + b\tan\xi) \tag{52}$$

$$S_b = \frac{b^2}{2}\tan\xi \tag{53}$$

$$S_c = \frac{-bl\,\mathrm{e}^{3\theta_2\tan\varphi}\sin\alpha_2\cos\varphi}{2\sin(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1+3\theta_2-\varphi)} \tag{54}$$

2) Q_u 做功功率 W_{Q_u}

$$W_{Q_u} = \frac{L}{2}bQ_u v_0 \tag{55}$$

3)各滑块体自重做功功率 W_γ

$$W_\gamma = \sum_{k=0}^{8}\gamma V_k v_{ky} \tag{56}$$

3.2　内能耗散率

根据前文建立的分析模型,基础下的机动许可破坏机构由一组经离散化处理的刚性滑块体组成,无塑性变形,因此,该破坏机构的内能耗散主要发生在速度间断面上,主要由以下 3 部分组成:

1)滑块体底部滑动面 S_k ($k=1,2,\cdots,8$)上的能量耗散 E_s

$$E_s = \sum\int_S c\Delta v_t \mathrm{d}S = \sum_{k=1}^{8} cv_k S_k\cos\varphi \tag{57}$$

2)滑块体侧部滑动面 S'_k ($k=0,1,\cdots,8$)上的能量耗散 E'_s

$$E'_s = \sum\int_{S'} c\Delta v_t \mathrm{d}S = cv_0 S'_0\cos\varphi + \sum_{k=1}^{8} cv_k S'_k \tag{58}$$

在此假定 1～8 号滑块的侧滑面为一般滑动摩擦面,但不考虑土体侧压力的影响,因而仅有粘聚力 c 做功产生能量损耗.

3)相邻两滑块体速度间断面 S''_k ($k=1,2,\cdots,8$)上的能量耗散 E''_s

$$E''_s = \sum\int_{S''} c\Delta v_t \mathrm{d}S = \sum_{k=1}^{8} c[v]_k S''_k\cos\varphi \tag{59}$$

3.3　临坡矩形基础地基极限承载力上限解

根据极限分析上限定理,对于给定的机动许可破坏机构,外力做功功率等于内能耗散率,即

$$W_q + W_{Q_u} + W_\gamma = E_s + E'_s + E''_s \tag{60}$$

将上式进行整理,并参照 Terzaghi 承载力公式的形式建立临坡矩形基础地基极限承载力表达式如下所示

$$Q_u = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma bN_\gamma \tag{61}$$

N_c,N_q和 N_γ分别为临坡地基极限承载力系数,其值分别为:

$$N_c = \frac{2}{bLv_0}\left(\cos\varphi\left(S'_0 v_0 + \sum_{k=1}^{8}(S_k v_k + S''_k[v]_k)\right) + \sum_{k=1}^{8} S'_k v_k\right) \tag{62}$$

$$N_q = \frac{-2}{bLv_0}(S_a v_{4y} + S_b v_0 + S_c v_{8y}) \tag{63}$$

$$N_\gamma = \frac{-4}{b^2 Lv_0}\sum_{k=0}^{8} V_k v_{ky} \tag{64}$$

由上述方法确定的临坡地基极限承载力公式,可写为

$$Q_u = f(\alpha_1,\alpha_2,\theta_1,\theta_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_5,\beta_6,\beta_7,\xi) \tag{65}$$

此式是一个含有 11 个可变角参量的高度非线性函数式,对于不同的自变量或者自变量组合利用上式可求得不同的极限承载力上限解.根据上限定理,最优的上限解应该是所有上限解的最小值,于是,该问题可转化为求解最小上限解的数学优化问题. 本文借助 MATLAB 计算软件,采用 SQP 优化算法对该问题进行优化求解.

4　与其他理论研究方法对比

通过以下工程算例,将采用本文方法所得计算结果分别与现有其他理论研究方法进行比较分析,以验证本文方法的合理性与正确性.

4.1　工程实例 1

某临坡矩形基础地基,地基土为均匀粉质粘性土,土体粘聚力 $c=20$ kPa,重度 $\gamma=18$ kN/m^3,内摩擦角 $\varphi=30°$,基础宽 $b=1$ m,长宽比 $l/b=2$,基础埋深 $h=0$,边坡距 $a=b$,改变坡角 η 的大小,分别按0°,20°,45°,30°和60°进行计算,并将采用本文方法和文献[15]方法所得地基极限承载力计算值

Q_u 进行对比分析,其分析结果如表 1 所示.

表 1 计算结果比较
Tab.1 Comparison of computation results

$\varphi=30^{\circ},l/b=2,a/b=1$		
坡角 $\eta/(^{\circ})$	Q_u /kPa	
	文献[15]方法	本文方法
0	—	2 196.3
20	1 449.4	1 803.1
30	1 271.8	1 649.4
45	1 041.0	1 350.8
60	883.6	1 155.8

根据计算结果对比分析,可得如下结论:

1)采用本文方法分析所得地基极限承载力随坡角 η 的变化规律基本上与文献[15]的结果一致,但本文方法所得结果偏大,这主要是因为两种方法采用的破坏模式不同,文献[15]采用的是单侧破坏模式,而本文采用的是双侧破坏模式,且本文方法充分考虑了矩形基础地基的三维端部效应,因而所得地基极限承载力结果偏大.

2)当坡角 η 趋于 0°时,地基极限承载力逐渐增大,临坡地基蜕变为平地地基,此时本文方法所得地基极限承载力为 $Q_u=2\ 196.3$ kPa ,由文献[1]方法可得相同条件下平地地基矩形基础的地基承载力系数分别为:$N_c=67.09$,$N_q=39.73$,$N_\gamma=46.20$,据此求得平地地基极限承载力值为 $Q_u=2\ 473.1$ kPa,经比较两者相差 10%,且本文方法计算值偏小,这主要与选用的破坏模式不同有关,但仍能说明本文方法的合理性与工程适用性.

4.2 工程实例 2

某临坡矩形基础地基,地基为均质碎石土,土体粘聚力 $c=10$ kPa,重度 $\gamma=18$ kN/m^3 ,内摩擦角 $\varphi=40^{\circ}$,基础宽 $b=2$ m ,基础埋深 $h=1$ m ,边坡距 $a=0$,坡角 $\eta=30^{\circ}$,逐渐改变基础的长宽比 l/b 的大小,采用本文方法分别求出地基极限承载力系数和极限承载力值并与文献[9]临坡条形基础计算方法(坡顶水平时)进行比较分析,分析结果见表 2.

表 2 计算结果比较
Tab.2 Comparison of computation results

	l/b	N_c	N_q	N_γ	Q_u /kPa
本文方法	2	133.14	30.76	57.98	3 482.40
	4	114.49	28.73	54.36	3 157.66
	6	98.89	26.69	50.93	2 866.48
	10	63.09	26.57	46.04	2 416.14
	14	48.82	26.26	41.96	2 188.84
	16	48.54	26.24	41.78	2 182.08
文献[9]方法		43.06	24.76	38.30	2 011.36

根据表 2 计算结果可知,当矩形基础长宽比越小时地基极限承载力越高,这说明临坡矩形基础承载力受三维端部效应的影响,其极限承载力较临坡条形基础地基有很大提高;当长宽比不断增大,矩形基础地基承载力逐渐收敛于条形基础的地基承载力值,与文献[9]方法的分析结果对比发现,两种方法所得地基承载力系数有一定差别,这主要是因为两种方法所构造的破坏模式不同,但两者所得极限承载力值仅相差 8%左右,说明了本文方法的计算准确性.

5 与有限元分析结果对比

在现有的文献资料中,缺乏可供参考的有关 c-φ 土的临坡矩形基础地基承载力实验研究数据,因此采用大型有限元分析软件 ABAQUS 对临坡矩形基础地基的极限承载力进行仿真分析并与本文分析方法计算结果进行对比,以进一步验证本文分析方法的可行性与合理性. 算例所采用的模型参数分别为:边坡坡角 $\eta=30^{\circ}$,矩形基础为刚性基础,长 $l=8$ m ,宽 $b=2$ m ,长边平行于边坡长度方向,基础埋深 $h=1$ m ,边坡距 $a=2$ m ,地基持力层为均质粘性土,粘聚力 $c=20$ kPa ,重度 $\gamma=18$ kN/m^3 ,内摩擦角 $\varphi=20^{\circ}$,在分析过程中土体采用弹塑性本构模型,服从 Mohr-Coulomb 屈服准则,弹性模量 $E=40\times10^3$ kPa,泊松比 $\mu=0.3$. 为了提高计算精度,采用如图 4 所示离散模型(将模型沿对称面剖开,仅取其一半进行研究),单元网格选用 C3D8R 六面体缩减单元.

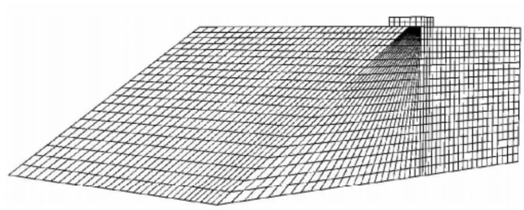


图 4 分析模型有限元网格
Fig.4 A finite element mesh for the analysis model

基于上述分析模型,采用分级加载的方式在基础顶面施加垂直向下的均布荷载,并根据所得的 P-s 曲线(见图 5)综合分析可得,其极限荷载为 429 kPa,此时相应的位移云图如图 6 所示.

根据本文所提出的分析方法对该工程算例进行计算,可得地基承载力系数分别为:$N_c=14.38$,

$N_q = 2.78$,$N_\gamma = 6.45$,代入式(61)可得地基极限承载力 $Q_u = 453.7$ kPa.

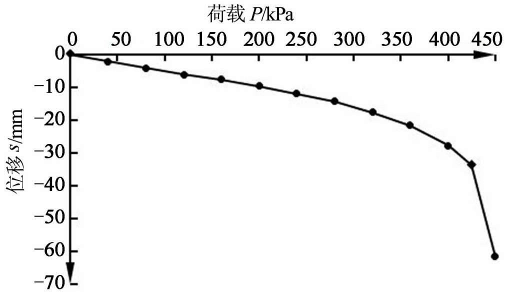


图 5　临坡矩形基础地基 P-s 曲线图
Fig. 5　The P-s curve of rectangular footings adjacent to slope

由有限元分析方法所得边坡地基土体位移云图图 6 可知,在极限荷载作用下土体主要沿边坡一侧发生滑动破坏,虽然基础内侧土体没有产生规则的滑动面,但在一定范围内产生了较大的塑性变形,表明有必要考虑基础内侧土体对承载力的影响. 对比两种方法的分析结果可知,采用本文方法所得结果较有限元分析结果略偏大,这主要是因为本文假定基础内侧土体也产生滑动破坏,而有限元分析方法中基础内侧一定范围内的土体仅产生了较大的塑性变形,但两种方法所得分析结果相差并不是太大,并且根据有限元分析方法所得边坡潜在滑动面的形状与本文假定的破坏模式较为接近,说明了本文方法的可行性与合理性.

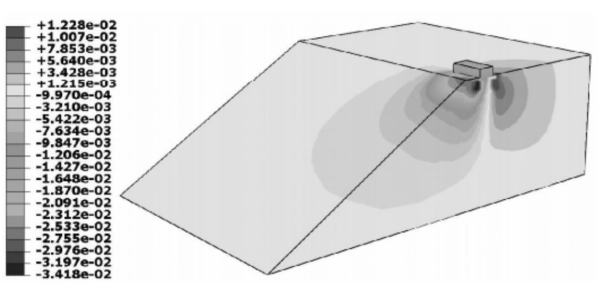


图 6　极限荷载作用下的位移分布
Fig. 6　Displacement distribution under ultimate bearing capacity

6　结　论

1)结合临坡矩形基础地基的工程特点,提出了新的多滑块双侧非对称三维破坏模式,该破坏模式既能充分考虑基础内侧土体抗剪强度对地基承载力的贡献作用,又能较好反映由于边坡的存在而引起的基础底部和基础两侧滑块体形状和尺寸的不对称性,并且该破坏模式有效反映临坡矩形基础地基的三维端部效应.

2)本文的三维滑块体侧滑面构造方法避免了大量繁琐的坐标计算和曲面积分运算,求解过程更加简便易行,具有较好的工程实践适用性.

3)基于上述破坏模式构建出临坡矩形基础地基承载力分析模型,并引入上限分析理论与优化算法,建立出可综合考虑边坡距、坡角、基础埋深、基础长宽比等多种因素影响的临坡矩形基础地基极限承载力确定方法,最后,通过与其他上限分析方法和有限元分析方法分析结果对比,表明了本文方法的可行性和合理性.

参考文献

[1]　MICHALOWSKI R L. Upper-bound load estimates on square and rectangular footings[J]. Geotechnique, 2001,51(9):787−798.

[2]　栾茂田，张其一，杨庆，等. 均质地基上浅埋矩形基础极限承载力上限分析[J]. 海洋工程，2008，26(2)：69−77.
LUAN Mao-tian，ZHANG Qi-yi，YANG Qing，*et al*. Upper bound limit analysis of bearing capacity of rectangular shallow footing on homogeneous clays[J]. The Ocean Engineering，2008，26(2)：69−77.(In Chinese)

[3]　胡卫东，曹文贵. 基于双侧非对称破坏模式的临坡地基承载力极限平衡分析方法[J]. 土木工程学报，2015，48(1)：121−128.
HU Wei-dong，CAO Wen-gui. The limit equilibrium method for ultimate bearing capacity of groud foundation adjacent to slope based on bilateral asymmetry failure mode[J]. China Civil Engineering Journal，2015，48(1)：121−128 .(In Chinese)

[4]　GRAHAM J，ANDREWS M，SHEILDS D H. Stress for shallow footings in cohesionless slopes[J]. Canadian Geotechnical Journal，1988，25(2)：238−249.

[5]　SARAN S，SUD V K，HANDA S C. Bearing capacity of footings adjacent to slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering，ASCE，1989，115(4)：553−573.

[6]　王晓谋，徐守国. 斜坡上的地基承载力的有限元分析[J]. 西安公路学院学报，1993，13(3)：13−17.
WANG Xiao-mou，XU Shou-guo. FEM analysis of bearing capacity of foundation on slopes [J]. Journal of Xi'an Highway Transportation University，1993，13(3)：13−17.(In Chinese)

[7]　王红雨，杨敏. 极限荷载作用下临近基坑 c-φ 土地基的破坏模式[J]. 岩土力学，2007，28(8)：1677−1681.
WANG Hong-yu，YANG Min. Analysis of c-φ soils failure zone of footings near excavations under ultimate load[J]. Rock

and Soil Mechanics, 2007, 28(8) :1677－1681. (In Chinese)

[8] 陈昌富,唐仁华,唐谚哲.临近斜坡地基地震承载力计算新方法[J].湖南大学学报:自然科学版, 2008, 35(4): 1－6.
CHEN Chang-fu, TANG Ren-hua, TANG Yan-zhe. A new calculation method for the seismic bearing capacity of shallow strip footings close to slope[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2008, 35(4): 1－6. (In Chinese)

[9] 尉学勇,王晓谋,怀超.斜坡地基极限承载力上限解计算与分析[J].岩土工程学报,2010,32(3): 381－387.
WEI Xue-yong, WANG Xiao-mou , HUAI Chao. Calculat-ion and analysis of upper limit solution of ultimate bearing capacity of sloping ground[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(3):381－387. (In Chinese)

[10] AZZOUZ A S , BALIGH M M. Loaded areas on cohesive slopes[J]. Geotech Engng Div Am Soc Civ Engrs, 1983, 109: 724－729.

[11] MICHALOWSKI R L. Three dimensional analysis of locally loaded slopes[J]. Geotechnique, 1989, 39(1):27－38.

[12] FARZANEH O, ASKARI F. Three dimensional analysis of nonhomogeneous slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenviromental Engineering, 2003, 129(2):137－145.

[13] DE BUHAN P, GARNIER D. Three dimensional bearing capacity analysis of a foundation near a slope[J]. Soils and Foundations, 1998, 38(3):153－163.

[14] GANJIAN N, ASKARI F, FARZANEH O. Bearing capacity of rectangular foundations near the slopes with nonassociated flow rules[J]. Forensic Engineering, 2009,265－277.

[15] 王红雨, 杨敏. 临近基坑矩形浅基础地基承载力上限估算[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(10): 1116－1122.
WANG Hong-yu, YANG Min. Approximate upper-bound solution for bearing capacity of rectangular footings near excavations[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(10): 1116－1122. (In Chinese)

[16] 徐培德,邱涤珊.非线性最优化方法及应用[M].长沙: 国防科技大学出版社,2008:149－195.
XU Pei-de, QIU Di-shan. Nonlinear optimization method and its application [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press,2008:149－195. (In Chinese)

[17] 索科洛夫斯基.松散介质静力学[M]. 徐志英译,北京: 地质出版社, 1956:97－110.
SOKOLOVSKII V V. Statics of soil media[M]. Translated by XU Zhi-ying. Beijing: Geological Publishing House ,1956: 97－110. (In Chinese)

[18] 胡卫东,曹文贵,袁青松.临坡双层粘土地基极限承载力的上限分析 [J]. 湖南大学学报:自然科学版, 2016, 43(1): 110－116.
HU Wei-dong, CAO Wen-gui, YUAN Qing-song. Upper bound solution for ultimate bearing capacity of the two-layer clay foundations adjacent to slope[J]. Journal of Hunan University:Natural Sciences, 2016, 43(1): 110－116. (In Chinese)

[19] 朱大勇, 丁秀丽, 刘华丽. 对称边坡三维稳定性计算方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(1): 22－27.
ZHU Da-yong, DING Xiu-li, LIU Hua-li. Method of three-dimensional stability analysis of a symmetrical slope[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 26(1): 22－27. (In Chinese)

[20] 刘华丽, 朱大勇, 钱七虎, 等. 边坡三维端部效应分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(6): 1905－1909.
LIU Hua-li, ZHU Da-yong, QIAN Qi-hu, *et al*. Analysis of three-dimensionalend effects of slopes[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011,32(6): 1905－1909. (In Chinese)

[21] SOUBRA A H. Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1999, 125(1):59－68.

[22] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier,1975:170－175.