

斜齿轮时变啮合刚度算法修正及影响因素研究*

刘文^{1†}, 李锐¹, 张晋红^{1,2}, 林腾蛟¹, 杨云¹

(1. 重庆大学 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044; 2. 重庆京东方光电科技有限公司, 重庆 400714)

摘要:针对势能法计算斜齿轮时变啮合刚度精度不足问题,提出一种刚度修正算法.考虑端面重合度大于或小于轴向重合度两种情况下单齿接触线长度的不同表达形式,建立齿根圆与基圆不重合时的变截面悬臂梁模型,采用切片法和积分思想推导并计算了斜齿轮啮合刚度,通过与ISO算法和有限元法对比分析,验证了该修正算法的可行性.在此基础上,探讨了螺旋角、模数、齿数、齿宽和压力角等参数对啮合刚度的影响.计算与分析表明,啮入段的相对时间与端面重合度和轴向重合度大小及比重有关;齿轮基本参数的变化引起重合度和单齿啮合刚度的改变,进而影响综合啮合刚度波动值和均值;当端面重合度或轴向重合度在整数附近时,啮合刚度波动值较小,而总重合度在整数附近时,啮合刚度波动值较大.与传统势能法相比,修正算法提高了斜齿轮时变啮合刚度的计算精度,在斜齿轮刚度激励的准确计算方面具有较强的实用性.

关键词:势能法;斜齿轮;时变啮合刚度;重合度

中图分类号:TH132.41

文献标志码:A

Study on Correction Algorithm of Time-varying Mesh Stiffness of Helical Gears and Its Influencing Factors

LIU Wen^{1†}, LI Rui¹, ZHANG Jinhong^{1,2}, LIN Tengjiao¹, YANG Yun¹

(1. The State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. Chongqing BOE Optoelectronics Technology CO., LTD, Chongqing 400714, China)

Abstract: Due to the inaccuracy of potential energy method in calculation of time-varying mesh stiffness of helical gears, a stiffness correction algorithm was proposed. Considering the different expressions for the length of contact lines of single tooth on two kinds of situations in which the transverse contact ratio is greater or less than the overlap ratio, a non-uniform cantilever beam model was established when root circle and base circle misaligned, and then the mesh stiffness of helical gears was derived and calculated by using slice-integral method. By comparing with ISO standard and finite element method, the feasibility of the proposed correction algorithm was verified. Meanwhile, a parametric study was conducted to investigate the effects of various parameters, such as helix angle, normal module, tooth number, face width and normal pressure angle on the behavior of mesh stiffness. The calculation and analysis indicate that the relative time of the engaging-in section is related to the proportion values of transverse contact ratio and over-

* 收稿日期:2017-03-13

基金项目:国家科技支撑计划资助项目(2015BAF06B02), National Key Technology Support Program(2015BAF06B02);国家自然科学基金资助项目(51175524), National Natural Science Foundation of China(51175524)

作者简介:刘文(1968-),男,重庆人,重庆大学副教授,博士

† 通讯联系人, E-mail: liuwencqu@163.com

lap ratio. Variation of gear parameters affects the fluctuation value of total mesh stiffness and average mesh stiffness by changing the contact ratios and single mesh stiffness. In addition, the fluctuation is little when the transverse contact ratio or overlap ratio is close to an integer, while it fluctuates more intensively when the total contact ratio is close to an integer. Compared with the traditional potential energy method, the precision of correction algorithm in calculating time-varying mesh stiffness of helical gears is obviously improved. It has relatively better practicability in the accurate calculation of stiffness excitation of helical gears.

Key words: potential energy method; helical gears; time-varying mesh stiffness; contact ratios

齿轮传动是机械系统中应用最广泛的运动和动力传递形式,对系统的动态特性有很大的影响.随着对机械系统性能要求的提高,齿轮传动正朝着大功率、高转速、低噪声的方向发展,而啮合刚度的时变特性是齿轮系统产生振动噪声的主要源头,它的准确计算是齿轮系统动力学分析的重要基础^[1].

在齿轮系统的啮合刚度方面,国内外学者进行了许多研究.齿轮啮合刚度由轮齿的弹性变形求得,其计算主要有材料力学法、弹性力学法、石川公式法和有限元法等.根据研究对象不同,又分为直齿轮和斜齿轮.对于直齿轮,文献[2-4]运用势能法对直齿轮时变啮合刚度进行了计算,并分析了齿根裂纹对啮合刚度的影响;文献[5]基于有限元法分析了两种算法对直齿轮啮合刚度的影响;文献[6]提出一种基于石川公式的直齿轮啮合刚度改进算法;文献[7]基于有限元法和弹性接触理论提出了一种线性规划法计算啮合刚度的方法,并分析了齿轮结构参数和基本参数对啮合刚度的影响;文献[8-9]基于势能法将齿根简化为圆弧和直线,推导并计算了直齿轮啮合刚度,提高了其计算精度.

对于斜齿轮,文献[10]提出了求解理想圆柱齿轮和斜齿轮时变啮合刚度的近似方程;文献[11]建立斜齿轮参数化数值模型并运用有限元法计算其时变啮合刚度;文献[12]将有限元法和弹性接触理论相结合来计算斜齿轮的啮合刚度;文献[13]提出了考虑安装误差时斜齿轮啮合刚度的有限元计算方法;文献[14]基于有限元法分析了不同齿轮参数对斜齿轮啮合刚度的影响规律;文献[15]运用累积积分势能法推导了斜齿轮的时变刚度,并分析了模数、齿数和齿宽的影响;文献[16]运用累积积分势能法研究了齿面剥落和局部破损对斜齿轮时变啮合强度的影响;文献[17-18]通过计算齿轮时变啮合刚度,并结合其他参数,预估了齿轮系统的振动特性和辐射噪声.

以上文献取得了大量研究成果,但对于斜齿轮啮合刚度的求解,ISO标准只能计算平均啮合刚度或齿轮单齿啮合刚度的最大值,有限元法计算量较大且结构参数改变需花费大量时间重新建模,石川公式难以考虑精确渐开线齿廓.势能法不仅可以考虑精确渐开线齿廓而且能够快速、准确求得斜齿轮的时变啮合刚度,目前基于势能法求解斜齿轮的啮合刚度虽有少量研究^[15-16],但其忽略了齿根圆与基圆不重合的问题,导致计算结果存在较大误差,同时对斜齿轮啮合刚度的影响因素研究较少.

本文在文献[3-4,8-9,15-16]研究成果的基础上,以斜齿轮副为研究对象,运用切片法和积分思想,提出了一种考虑齿根圆与基圆不重合时斜齿轮啮合刚度的修正算法,进一步提高了计算精度,使斜齿轮的时变啮合刚度求解更加准确.此外,分析探讨了螺旋角、模数、齿数、齿宽、压力角的变化对斜齿轮啮合刚度的影响以及啮合刚度波动值与重合度之间的关系,为齿轮系统减振降噪设计提供了一定的理论基础.

1 斜齿轮时变啮合刚度计算原理

对于直齿轮来说,在不考虑重合度的情况下,每个轮齿可看作是一个变截面的悬臂梁,在齿面载荷的作用下发生变形.如图1所示为直齿轮轮齿变截面悬臂梁模型.

齿轮的时变啮合刚度包括5个部分:赫兹接触刚度 k_h 、弯曲刚度 k_b 、剪切刚度 k_s 、轴向压缩刚度 k_a 和基体刚度 k_f ,齿轮副的啮合刚度为各部分刚度的并联形式.对于直齿轮,各部分刚度可表示为^[2-4]:

$$\frac{1}{k_h} = \frac{2U_h}{F^2} = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi EB} \quad (1)$$

$$\frac{1}{k_b} = \frac{2U_b}{F^2} = \int_0^d \frac{[(d-x)\cos\alpha_1 - h\sin\alpha_1]^2}{EI_x} dx \quad (2)$$

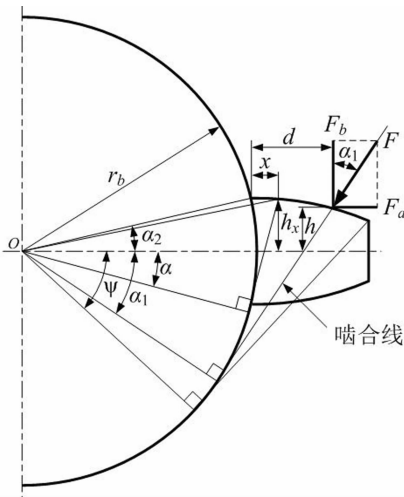


图 1 直齿轮轮齿变截面悬臂梁模型

Fig.1 Cantilever beam model of spur gear tooth

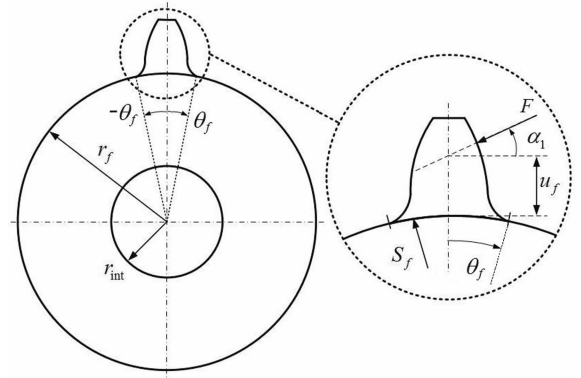


图 2 齿轮轮体变形几何参数

Fig.2 Geometrical parameters for gear rim deformation

表 1 式(6)中的系数值

Tab.1 Values of the coefficients for Eq. (6)

	$L^*(h_{fi}, \theta_f)$	$M^*(h_{fi}, \theta_f)$	$P^*(h_{fi}, \theta_f)$	$Q^*(h_{fi}, \theta_f)$
A_i	-5.574E-5	60.111E-5	-50.952E-5	-6.2042E-5
B_i	-1.9986E-3	28.100E-3	185.50E-3	9.0889E-3
C_i	-2.3015E-4	-83.431E-4	0.0538E-4	-4.0964E-4
D_i	4.7702E-3	-9.9256E-3	53.300E-3	7.8297E-3
E_i	0.027 1	0.162 4	0.289 5	-0.147 2
F_i	6.804 5	0.908 6	0.923 6	0.690 4

综上所述,将各部分刚度按并联方式组合即可得到一对齿轮副的啮合刚度,表示为:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{f2}}} \quad (7)$$

式中:下标 1 和 2 分别指主动轮和被动轮。

斜齿轮由于存在螺旋角,其啮合刚度计算与直齿轮有区别,但可以利用切片法和积分的思想,将其沿齿宽方向切分成若干片很薄的轮齿,每一部分可认为是直齿轮,通过计算各部分的啮合刚度,最后积分即可得到斜齿轮的啮合刚度.斜齿轮的悬臂梁模型如图 3 所示。

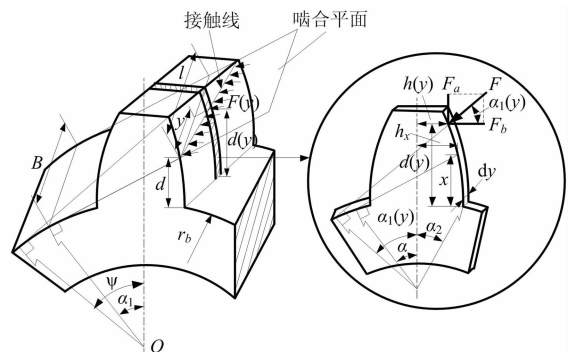


图 3 斜齿轮悬臂梁模型

Fig.3 Cantilever beam model of helical gear tooth

$$\frac{1}{k_s} = \frac{2U_s}{F^2} = \int_0^d \frac{1.2 \cos^2 \alpha_1}{GA_x} dx \quad (3)$$

$$\frac{1}{k_a} = \frac{2U_a}{F^2} = \int_0^d \frac{\sin^2 \alpha_1}{EA_x} dx \quad (4)$$

$$\frac{1}{k_f} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{EB} [L^* (\frac{u_f}{S_f})^2 + M^* (\frac{u_f}{S_f}) + P^* (1 + Q^* \tan^2 \alpha_1)] \quad (5)$$

式中: U_h 、 U_b 、 U_s 和 U_a 分别为储存在轮齿中的赫兹接触能量、弯曲能量、剪切能量和轴向压缩能量; F 为啮合线方向的啮合力; E 、 G 和 ν 分别为弹性模量、剪切模量和泊松比; B 为齿宽, I_x 为轮齿距离基圆 x 处截面的惯性距; A_x 为横截面面积; d 为啮合点和基圆在齿高方向的距离; h 为啮合点和齿轮中心线的距离, α_1 为啮合力 F 与齿轮中心线垂直方向的夹角。

由齿轮轮体变形引起的啮合线上的等效刚度即基体刚度,其表达式如式(5)所示. 式中 u_f 和 S_f 如图 2 所示, u_f 和 S_f 可表示为^[3]:

$$u_f = r_b [(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1] - r_f$$

$$S_f = 2r_f \theta_f$$

式(5)中系数 L^* 、 M^* 、 P^* 、 Q^* 由多项式近似为^[19]:

$$X_i^*(h_{fi}, \theta_f) = A_i/\theta_f^2 + B_i h_{fi}^2 + C_i h_{fi}/\theta_f + D_i/\theta_f + E_i h_{fi} + F_i \quad (6)$$

式(6)中: X_i^* 代表系数 L^* 、 M^* 、 P^* 和 Q^* ; $h_{fi} = r_f/r_{int}$; r_f 、 r_{int} 与 θ_f 如图 2 所示; A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 、 E_i 和 F_i 的值列于表 1 中。

斜齿轮的弯曲刚度 k_b 、剪切刚度 k_s 和轴向压缩刚度 k_a 分别表示为^[15]:

$$k_b = \sum_{i=1}^N 1 / \left(\int_{-\alpha'_1}^{\alpha'_2} \frac{3(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} \times \right. \\ \left. \frac{\{1 + \cos \alpha'_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 d\alpha}{2E\Delta y} \right) \quad (8)$$

$$k_s = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\int_{-\alpha'_1}^{\alpha'_2} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha'_1}{E[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha] \Delta y} d\alpha} \quad (9)$$

$$k_a = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\int_{-\alpha'_1}^{\alpha'_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha'_1}{2E[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha] \Delta y} d\alpha} \quad (10)$$

式中: N 为斜齿轮切分的份数; $\Delta y = l/N$; l 为接触线长度在齿宽方向的分量。

2 斜齿轮时变啮合刚度修正算法

将轮齿简化为基圆上的悬臂梁模型不够精确, 因为轮齿起始于齿根圆, 当两者不重合时, 啮合刚度将产生误差, 因此有必要对斜齿轮啮合刚度算法进行修正, 同时对单齿接触线长度两种表达形式下啮合刚度表达式中相关参数的不同进行详细补充。

2.1 时变接触线长度

在一个单齿啮合周期内, 斜齿轮在啮合平面上的时变接触线长度有两种表达形式, 如图 4 所示。

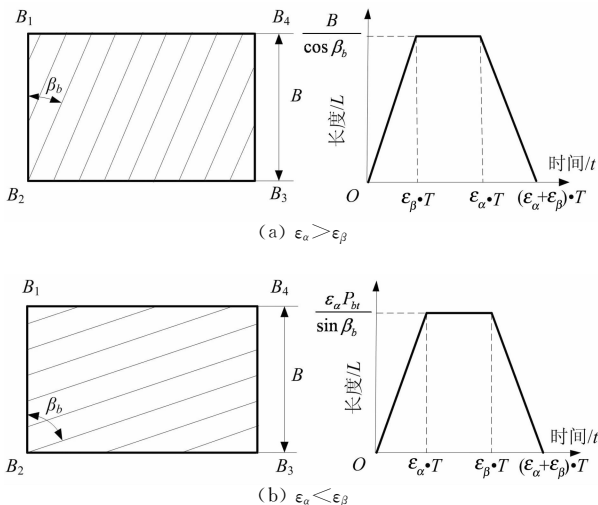


图 4 斜齿轮时变接触线长度

Fig. 4 Time-varying contact length of helical gear

图中, β_b 为基圆螺旋角, P_{bt} 为端面基圆齿距, t_z 为啮合周期. 单齿啮合时最大接触线长度 L_{\max} 为:

$$L_{\max} = \begin{cases} B/\cos \beta_b & \epsilon_a > \epsilon_\beta \\ \epsilon_a P_{bt} / \sin \beta_b & \epsilon_a < \epsilon_\beta \end{cases} \quad (11)$$

任意时刻单齿接触线长度 L 为:

$$L = \begin{cases} L_{\max}/(\epsilon_1 t_z) t & t \in [0, \epsilon_1 t_z] \\ L_{\max} & t \in [\epsilon_1 t_z, \epsilon_2 t_z] \\ L_{\max}/\epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2 - t/t_z) & t \in [\epsilon_2 t_z, (\epsilon_1 + \epsilon_2) t_z] \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\epsilon_1 = \min(\epsilon_a, \epsilon_\beta)$, $\epsilon_2 = \max(\epsilon_a, \epsilon_\beta)$, $\epsilon_a, \epsilon_\beta$ 分别为齿轮副端面重合度和轴向重合度。

2.2 基圆半径大于齿根圆半径时的啮合刚度

基圆半径大于齿根圆半径时, 未修正的算法在求解啮合刚度时, 将轮齿简化为基圆上的悬臂梁, 相当于减小了悬臂梁的长度, 未考虑基圆与齿根圆之间轮齿部分的变形, 将导致啮合刚度值偏大. 修正后的轮齿变截面悬臂梁二维模型如图 5 所示。

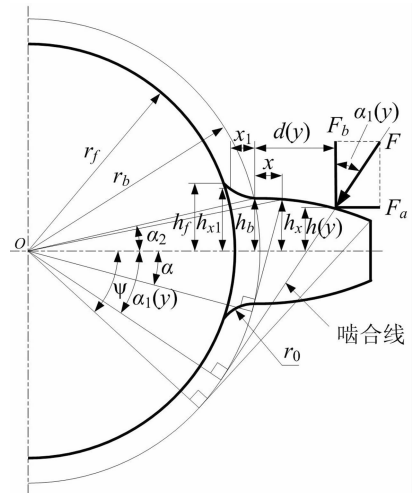


图 5 基圆半径大于齿根圆半径时轮齿悬臂梁模型

Fig. 5 Cantilever beam model when the radius of base circle is greater than root circle

此时每一片轮齿的弯曲势能为:

$$dU_b = \frac{F^2}{2dk_b} = \int_0^{d(y)} \frac{[F_b(d(y) - x) - F_a h(y)]^2}{2EdI_x} dx + \\ \int_0^{r_b - r_f} \frac{[F_b(d(y) + x_1) - F_a h(y)]^2}{2EdI_{x1}} dx_1 \quad (13)$$

式中: $d(y)$ 为啮合点和基圆在齿高方向的距离; $h(y)$ 为啮合点和齿轮中心线的距离; dI_x 表示距齿根 x 处截面的面积惯性矩, 相关表达式为:

$$\begin{cases} d(y) = r_b[(\alpha_1(y) + \alpha_2)\sin\alpha_1(y) + \cos\alpha_1(y) - \cos\alpha_2], \\ h(y) = r_b[(\alpha_1(y) + \alpha_2)\cos\alpha_1(y) - \sin\alpha_1(y)], \\ x = r_b[\cos\alpha - (\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha - \cos\alpha_2] \\ h_x = r_b[(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha + \sin\alpha] \end{cases}$$

代入式(13)中可得每一片轮齿的弯曲刚度,然后进行积分,即可得到轮齿的弯曲刚度 k_b :

$$k_b = \int_0^l dy / \left(\int_{-\alpha_1(y)}^{\alpha_2} \frac{3(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha}{2E[\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha]^3} \times \{1 + \cos\alpha_1(y)[(\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha - \cos\alpha]\}^2 d\alpha + \int_0^{r_b - r_f} \frac{3\{[d(y) + x_1]\cos\alpha_1(y) - h(y)\sin\alpha_1(y)\}^2}{2Eh_{x1}^3} dx_1 \right) \quad (14)$$

式中 $\alpha_2 = \pi/(2z) + \text{inv}\alpha_0$, 其中 z 表示主从动齿轮的齿数, α_0 为压力角; h_{x1} 为齿根过渡曲线某点与齿轮中线的距离, $h_{x1} = h_b + r_0 - \sqrt{r_0^2 - x_1^2}$, 其中 r_0 为齿根过渡曲线半径, $h_b = r_b \sin\alpha_2$.

因为式(14)不可积分,所以采用求和方法替代积分方法求解斜齿轮的啮合刚度,于是斜齿轮的弯曲刚度 k_b 可重新表示为:

$$k_b = \sum_{i=1}^N 1 / \left(\int_{-\alpha_1'}^{\alpha_2} \frac{3(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha}{2E[\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha]^3 \Delta y} \times \{1 + \cos\alpha_1'[(\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha - \cos\alpha]\}^2 d\alpha + \int_0^{r_b - r_f} \frac{3\{[d(y) + x_1]\cos\alpha_1' - h(y)\sin\alpha_1'\}^2}{2Eh_{x1}^3 \Delta y} dx_1 \right) \quad (15)$$

式中: $l = L \cdot \cos\beta_b$; α_1' 为每一片轮齿上接触线位置的啮合力 F 与齿轮中心线的垂线方向的夹角,根据单齿接触线长度表达形式可分两种情况讨论,其详细求解方法如下:

1) 端向重合度大于轴向重合度 ($\epsilon_a > \epsilon_\beta$)

主动轮的 α_1' 为:

$$\alpha_1' = \begin{cases} \alpha_{1t}(t) - [\alpha_{1t}(t) - \alpha_{1t}(0)]i/N & t \in [0, \epsilon_\beta t_z] \\ \alpha_{1t}(t) - [\alpha_{1t}(t) - \alpha_{1t}(t - \epsilon_\beta t_z)]i/N & t \in [\epsilon_\beta t_z, \epsilon_a t_z] \\ \alpha_{1t}(\epsilon_a t_z) - [\alpha_{1t}(\epsilon_a t_z) - \alpha_{1t}(t - \epsilon_\beta t_z)]i/N & t \in [\epsilon_a t_z, (\epsilon_a + \epsilon_\beta)t_z] \end{cases}$$

其中 $\alpha_{1t}(t)$ 为主动轮 α_1' 在端面齿廓上对应的角度,

$$\alpha_{1t}(t) = \omega_1 t - \frac{\pi}{2z_1} - \text{inv}\alpha_0 +$$

$$\tan \left[a \cos \frac{r_{b1}}{\sqrt{r_{a2}^2 + a'^2 - 2r_{a2}a' \cos(a \cos \frac{r_{b2}}{r_{a2}} - \alpha')}} \right]$$

式中: a' 代表实际中心距, α' 表示啮合角, r_b 和 r_a 分别代表齿轮的基圆和齿顶圆半径。

从动轮的 α_2' 为:

$$\alpha_2' =$$

$$\begin{cases} \alpha_{2t}(t) + [\alpha_{2t}(0) - \alpha_{2t}(t)]i/N & t \in [0, \epsilon_\beta t_z] \\ \alpha_{2t}(t) + [\alpha_{2t}(t - \epsilon_\beta t_z) - \alpha_{2t}(t)]i/N & t \in [\epsilon_\beta t_z, \epsilon_a t_z] \\ \alpha_{2t}(\epsilon_a t_z) + [\alpha_{2t}(t - \epsilon_\beta t_z) - \alpha_{2t}(\epsilon_a t_z)]i/N & t \in [\epsilon_a t_z, (\epsilon_a + \epsilon_\beta)t_z] \end{cases}$$

其中 $\alpha_{2t}(t)$ 为从动轮 α_2' 在端面齿廓上对应的角度,

$$\alpha_{2t}(t) = \tan(a \cos \frac{r_{b2}}{r_{a2}}) - \frac{\pi}{2z_2} - \text{inv}\alpha_0 - \frac{z_1}{z_2} \omega_1 t$$

2) 端向重合度小于轴向重合度 ($\epsilon_a < \epsilon_\beta$)

主动轮的 α_1' 为:

$$\alpha_1' = \begin{cases} \alpha_{1t}(t) - [\alpha_{1t}(t) - \alpha_{1t}(0)]i/N & t \in [0, \epsilon_a t_z] \\ \alpha_{1t}(\epsilon_a t_z) - [\alpha_{1t}(\epsilon_a t_z) - \alpha_{1t}(0)]i/N & t \in [\epsilon_a t_z, \epsilon_\beta t_z] \\ \alpha_{1t}(\epsilon_a t_z) - [\alpha_{1t}(\epsilon_a t_z) - \alpha_{1t}(t - \epsilon_\beta t_z)]i/N & t \in [\epsilon_\beta t_z, (\epsilon_a + \epsilon_\beta)t_z] \end{cases}$$

从动轮的 α_2' 为:

$$\alpha_2' = \begin{cases} \alpha_{2t}(t) + [\alpha_{2t}(0) - \alpha_{2t}(t)]i/N & t \in [0, \epsilon_\beta t_z] \\ \alpha_{2t}(\epsilon_a t_z) + [\alpha_{2t}(0) - \alpha_{2t}(\epsilon_a t_z)]i/N & t \in [\epsilon_\beta t_z, \epsilon_a t_z] \\ \alpha_{2t}(\epsilon_a t_z) + [\alpha_{2t}(t - \epsilon_\beta t_z) - \alpha_{2t}(\epsilon_a t_z)]i/N & t \in [\epsilon_a t_z, (\epsilon_a + \epsilon_\beta)t_z] \end{cases}$$

同求解弯曲刚度 k_b 过程类似,斜齿轮的剪切刚度 k_s 和轴向压缩刚度 k_a 分别为:

$$k_s = \sum_{i=1}^N 1 / \left(\int_{-\alpha_1'}^{\alpha_2} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha \cos^2 \alpha_1'}{E[\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha] \Delta y} d\alpha + \int_0^{r_b - r_f} \frac{1.2 \cos^2 \alpha_1'}{GA_{x1}} dx_1 \right) \quad (16)$$

$$k_a = \sum_{i=1}^N 1 / \left(\int_{-\alpha_1'}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha \sin^2 \alpha_1'}{2E[\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha] \Delta y} d\alpha + \int_0^{r_b - r_f} \frac{\sin^2 \alpha_1'}{EA_{x1}} dx_1 \right) \quad (17)$$

2.3 基圆半径小于齿根圆半径时的啮合刚度

基圆半径小于齿根圆半径时,未修正的算法在求解啮合刚度时,将轮齿简化为基圆上的悬臂梁,增加了悬臂梁的长度,多计算了基圆与齿根圆之间轮齿部分的变形,将导致啮合刚度值偏小,需要在原啮合刚度公式基础上改变积分的上限.修正后的轮齿变截面悬臂梁二维模型如图 6 所示.

修正后斜齿轮的弯曲刚度 k_b 、剪切刚度 k_s 和轴向压缩刚度 k_a 分别表示为:

$$k_b = \sum_{i=1}^N 1 / \left(\int_{-\alpha_1'}^{f(\alpha)} \frac{3(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha}{[\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha]^3} \times \{1 + \cos\alpha_1'[(\alpha_2 - \alpha)\sin\alpha - \cos\alpha]\}^2 d\alpha \right) \quad (18)$$

$$k_s = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\int_{-\alpha_1'}^{f(\alpha)} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha \cos^2 \alpha_1'}{E[\sin\alpha + (\alpha_2 - \alpha)\cos\alpha] \Delta y} d\alpha} \quad (19)$$

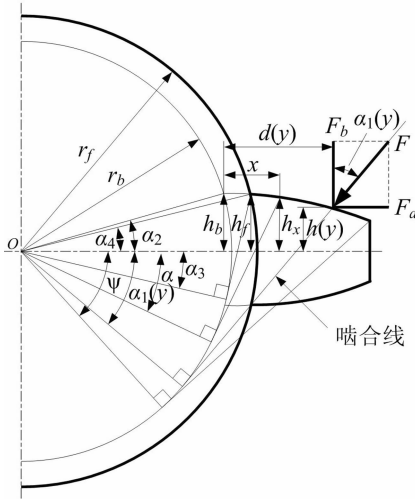


图6 基圆半径小于齿根圆半径时轮齿悬臂梁模型
Fig. 6 Cantilever beam model when the radius of base circle is less than root circle

$$k_a = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\int_{-\alpha_1}^{f(\alpha)} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha_1}{2E[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha] \Delta y} d\alpha} \quad (20)$$

$$\text{式中 } f(\alpha) = \begin{cases} -\alpha_3 & r_f \cos \alpha_4 \geq r_b \\ \alpha_4 & r_f \cos \alpha_4 < r_b \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \alpha_f - \left[\frac{\pi}{2z} + (\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_f) \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{\pi}{2z} + (\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_f)$$

其中 α_f 为齿根圆压力角。

无论齿根圆与基圆大小关系如何,斜齿轮的赫兹接触刚度 k_h 均为:

$$k_h = \frac{\pi EL}{4(1-\nu^2)} \quad (21)$$

同样,斜齿轮的基体刚度 k_f 为:

$$k_f = \sum_{i=1}^N 1 / \left(\frac{\cos^2 \alpha_1'}{E \Delta y} \left\{ L^* \left(\frac{u_f}{S_f} \right)^2 + M^* \left(\frac{u_f}{S_f} \right) + P^* [1 + Q^* \tan^2(\alpha_1')] \right\} \right) \quad (22)$$

2.4 啮合刚度修正算法验证

采用 ISO 6336-1-2006 算法、有限元法、文献[15]及本文的修正方法对两组传动比为1的斜齿轮副(一组齿数为20,模数为3 mm,螺旋角为15°,齿宽为30 mm,转速为1 000 r/min,另一组齿数为60,其它参数相同)的啮合刚度进行对比分析。

表2和表3为各方法计算的单齿啮合刚度最大值 C 和啮合刚度平均值 $C_{\gamma m}$ 与 ISO 算法计算值误差对比,图7和图8为各方法计算的齿轮啮合刚度曲

线,图中横坐标 T 为无量纲时间, $T = t/t_e$, t 为时间, t_e 为单齿啮合时间。

表2和图7为基圆半径大于齿根圆半径时(齿数为20)啮合刚度计算结果,可以看出,本文和有限元法计算结果与 ISO 算法最接近,单齿啮合刚度误差分别为1.11%和1.66%,啮合刚度平均值误差分别为3.64%和4.66%,文献[15]因为没有考虑基圆与齿根圆之间的变形,导致啮合刚度偏大,单齿啮合刚度和啮合刚度平均值误差分别为11.1%和13.4%。

表2 基圆半径大于齿根圆半径时啮合刚度误差对比
Tab. 2 The relative error of mesh stiffness when the radius of base circle is greater than root circle

	$C/[10^8(\text{N/m})]$	误差/%	$C_{\gamma m}/[10^8(\text{N/m})]$	误差/%
ISO 标准	3.61	0	4.94	0
有限元法	3.55	1.66	5.17	4.66
文献[15]	4.01	11.1	5.60	13.4
本文	3.65	1.11	5.12	3.64

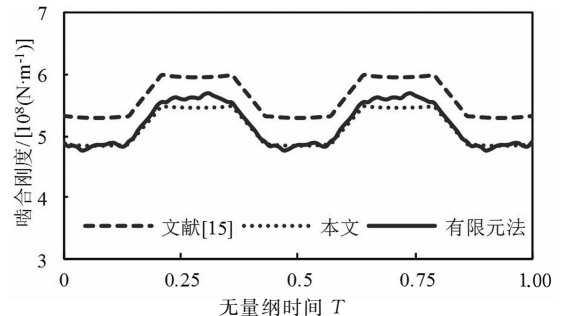


图7 基圆半径大于齿根圆半径时啮合刚度对比曲线
Fig. 7 Comparison of mesh stiffness when the radius of base circle is greater than root circle

表3和图8为基圆半径小于齿根圆半径时(齿数为60)啮合刚度计算结果,可以看出,本文和有限元法计算结果与 ISO 算法最接近,单齿啮合刚度误差分别为1.84%和0.46%,啮合刚度平均值误差分别为2.12%和3.48%,文献[15]因为多计算了基圆与齿根圆之间的变形,导致啮合刚度偏小,单齿啮合刚度和啮合刚度平均值误差分别为19.8%和19.7%。

表3 基圆半径小于齿根圆半径时啮合刚度误差对比
Tab. 3 The relative error of mesh stiffness when the radius of base circle is less than root circle

	$C/[10^8(\text{N/m})]$	误差/%	$C_{\gamma m}/[10^8(\text{N/m})]$	误差/%
ISO 标准	4.34	0	6.60	0
有限元法	4.36	0.46	6.83	3.48
文献[15]	3.48	19.8	5.30	19.7
本文	4.42	1.84	6.74	2.12

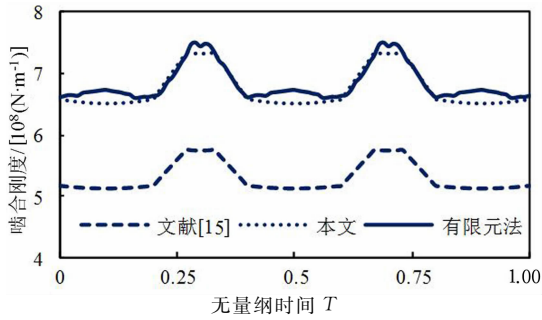


图 8 基圆半径小于齿根圆半径时啮合刚度对比曲线
Fig. 8 Comparison of mesh stiffness when the radius of base circle is less than root circle

3 斜齿轮基本参数对啮合刚度的影响

斜齿轮的基本参数主要包括模数、齿数、螺旋角、齿宽、压力角等,为揭示各参数对啮合刚度的影响,以表 4 中的参数为基准,通过改变基本参数开展研究.

3.1 螺旋角

将表 4 中斜齿轮副的螺旋角分别设为 6° 、 9° 、 12° 、 15° 、 18° 和 21° ,其他参数保持不变,不同螺旋角时斜齿轮的重合度如表 5 所示,对应的单齿与综合啮合刚度曲线如图 9 所示(图中虚线为单齿啮合刚度,实线为综合啮合刚度).可以看出,螺旋角增大使端面重合度减小,轴向重合度增大,总重合度增

大;齿轮副由两齿/三齿交替啮合逐渐过渡到三齿/四齿交替啮合,且多齿啮合区的啮合刚度不一定大于少齿啮合区的啮合刚度.

此外,螺旋角较小时,端面重合度大于轴向重合度,螺旋角增大使轴向重合度在总重合度中的比重逐渐增加,啮入段的相对时间增加;随着螺旋角继续增大,当螺旋角增加至端面重合度小于轴向重合度,啮入段的相对时间将减少.同时,螺旋角增大对啮合刚度均值和波动值 ΔC ,影响较小,啮合刚度均值基本不发生变化.结合表 5 和图 9 可看出,当轴向重合度靠近整数时,啮合刚度的波动值较小.

表 4 斜齿轮副的主要参数
Tab. 4 Key parameters of helical gears

参数名称	数值	参数名称	数值
模数 m_n/mm	4	齿数 z_1/z_2	50/50
螺旋角 $\beta/^\circ$	15	齿宽 B/mm	50
压力角 $\alpha_n/^\circ$	20	变位系数 x_{n1}/x_{n2}	0/0
弹性模量 E/Pa	2.06×10^{11}	泊松比 ν	0.3

表 5 不同螺旋角的重合度
Tab. 5 Contact ratio with different helix angles

螺旋角 $\beta/^\circ$	端面重合度 ϵ_α	轴向重合度 ϵ_β	总重合度 ϵ_γ
6	1.741	0.416	2.157
9	1.723	0.622	2.346
12	1.699	0.827	2.526
15	1.668	1.030	2.698
18	1.630	1.230	2.860
21	1.586	1.426	3.012

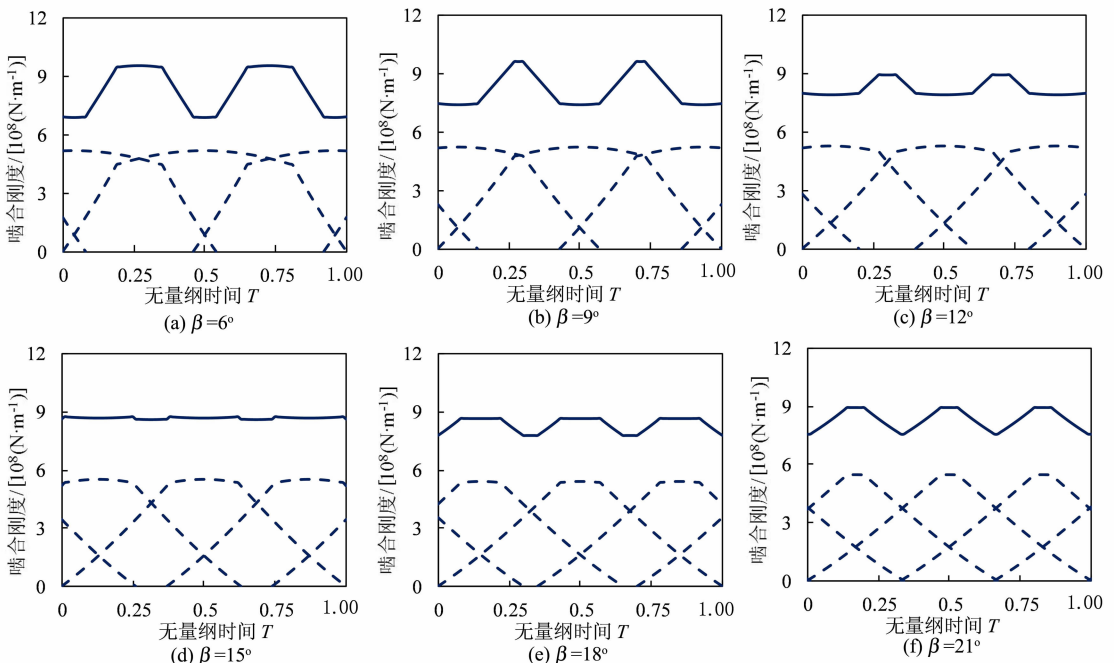


图 9 不同螺旋角时单齿与综合啮合刚度
Fig. 9 Single and total mesh stiffness with different helix angles

为明确重合度和啮合刚度波动值之间的关系,令螺旋角从 0° 每间隔 1° 变化到 35° ,对应的啮合刚度波动值曲线如图10所示。

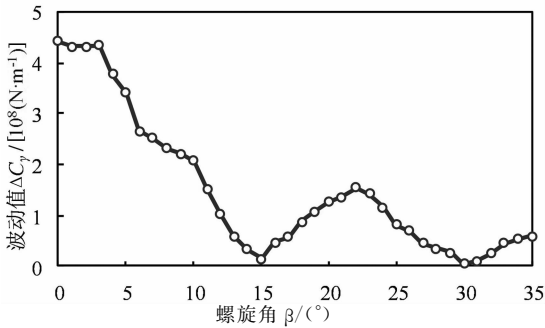


图10 不同螺旋角的啮合刚度波动值
Fig. 10 Mesh stiffness fluctuation value with different helix angles

由图10可以看出,随着螺旋角的增大,啮合刚度波动值并非单调下降。当螺旋角为 15° 和 30° 时,啮合刚度波动值均处于极小值位置,此时对应的轴向重合度恰好在整数附近。与此同时,当螺旋角为 3° 和 22° 时,啮合刚度波动值均处于极大值位置,此时总重合度恰好在整数附近。而对于直齿轮而言,端面重合度在整数附近时,啮合刚度波动值较小^[1]。因此可以得出,当端面重合度或轴向重合度接近整数时,斜啮合刚度将具有较小的波动值,当总重合度接近整数时,斜啮合刚度将具有较大的波动值。

传统观点认为重合度越大,齿轮系统运转越平稳,其实这一观点值得商榷。系统运转稳定性与啮合刚度波动值有直接联系,因此工程实践中可考虑将轴向重合度调整至整数附近以降低系统的振动。

3.2 模数和齿数

在设计初期,齿轮系统和齿轮箱的大体尺寸就已确定,因此在改变齿数的同时,也应相应改变模数以保证中心距不变。将齿数从30每间隔10变化到80,相应的模数从6.67 mm变化至2.5 mm,对应的单齿啮合刚度如图11所示,啮合刚度波动值和均值如图12所示。齿数增加使端面重合度和轴向重合度增大,但轴向重合度在总重合度中的比重增加,因此啮入段的相对时间增加;但单齿啮合刚度最大值未发生明显变化,同时由于总重合度增加,导致啮合刚度均值略有增加;轴向重合度在整数附近时($z=50, \epsilon_\beta=1.030$),啮合刚度波动值较小,总重合度在整数附近时($z=70, \epsilon_\gamma=3.155$),啮合刚度波动值较大。

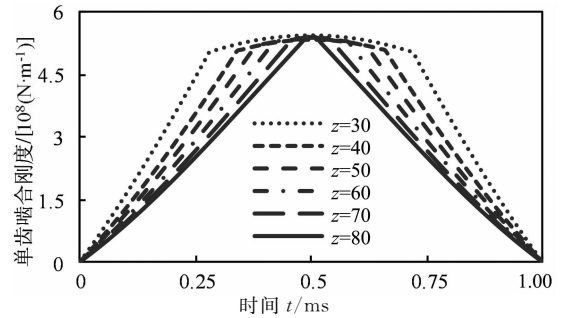


图11 不同齿数和模数的单齿啮合刚度
Fig. 11 Single mesh stiffness with different tooth and modules

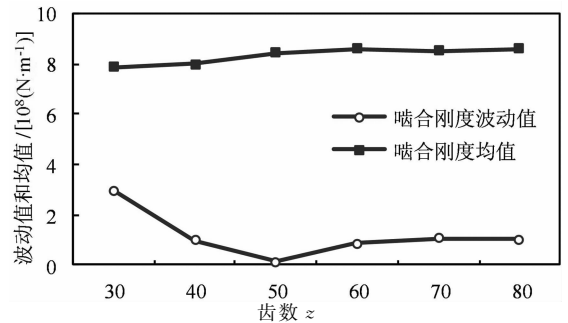


图12 不同齿数和模数的啮合刚度波动值与均值
Fig. 12 Mesh stiffness fluctuation and average value with different tooth and modules

3.3 齿宽

齿宽增加时不影响齿轮副端面重合度,而使轴向重合度增加,因此啮入段的相对时间增加。齿宽增加使轮齿接触变形、弯曲变形、剪切变形、轴向压缩变形和基体变形减小,从而使单齿啮合刚度增加。将齿宽从30 mm每隔10 mm增加至80 mm,对应的单齿啮合刚度如图13所示。重合度与单齿啮合刚度增加使啮合刚度均值接近线性规律增加,轴向重合度在整数附近时($B=50, \epsilon_\beta=1.030$),啮合刚度波动值较小,如图14所示。

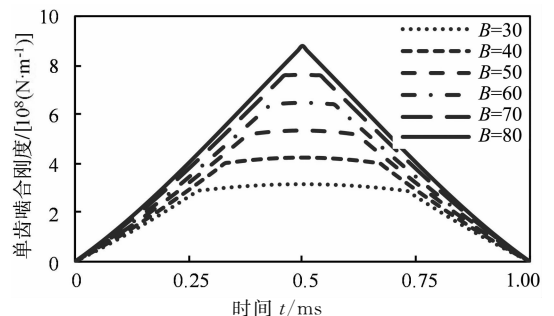


图13 不同齿宽的单齿啮合刚度
Fig. 13 Single mesh stiffness with different face widths

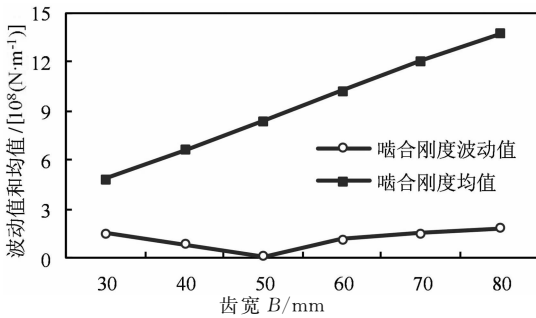


图14 不同齿宽的啮合刚度波动值与均值

Fig. 14 Mesh stiffness fluctuation and average value with different face widths

3.4 压力角

当压力角增大时,齿顶变薄而齿根变厚,齿面曲率半径会增大,从而提高轮齿的齿面接触强度和齿根弯曲强度.不同压力角的单齿啮合刚度如图15所示,由图15可以看出压力角增加使轮齿接触变形和弯曲变形减小,从而使单齿啮合刚度最大值增加;同时轴向重合度在总重合度中的比重增加,因此啮入段的相对时间增加.将齿轮的法面压力角从 15° 每间隔 1° 变化至 25° ,对应的啮合刚度波动值和均值如图16所示.由图16可以看出,虽然单齿啮合刚度有所增加,但是总重合度减小,因此啮合刚度均值随着压力角的增加并非呈现单调减小趋势,同时压力角的变化不影响轴向重合度,所以啮合刚度波动值未发生明显变化,均处于较小的位置.

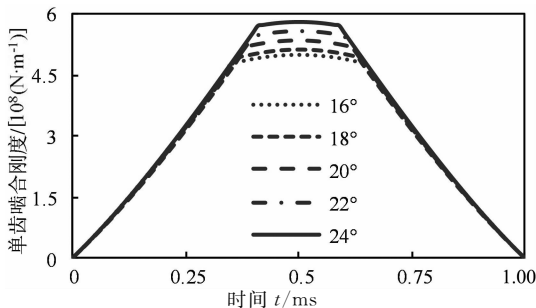


图15 不同压力角的单齿啮合刚度

Fig. 15 Single mesh stiffness with different pressure angles

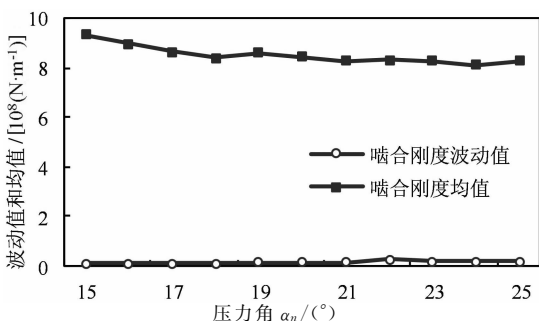


图16 不同压力角的啮合刚度波动值与均值

Fig. 16 Mesh stiffness fluctuation and average value with different pressure angles

4 结论

1) 基于势能法提出了一种考虑齿根圆与基圆不重合时的斜齿轮时变啮合刚度修正方法,通过与ISO算法和有限元法的对比分析,验证了该修正算法的可行性,提升了斜齿轮啮合刚度的计算精度.

2) 分析探讨了螺旋角、模数、齿数、齿宽、压力角的变化对斜齿轮啮合刚度的影响.啮入段的相对时间与端面重合度和轴向重合度大小及比重有关;齿轮副的重合度和单齿啮合刚度随齿轮参数的变化而改变,进而影响综合啮合刚度的波动值和均值.计算与分析结果可为斜齿轮传动参数的优化选取提供参考.

3) 重合度是影响啮合刚度波动值的重要因素.当端面重合度或轴向重合度在整数附近时,啮合刚度波动值较小,而总重合度在整数附近时,啮合刚度波动值较大.在设计中应合理搭配齿轮参数,一方面应保证较大的重合度,使更多的齿同时受载,同时需确保啮合刚度的波动值较小,从而降低系统的振动.

参考文献

- [1] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 11-48.
LI R F, WANG J J. Systematic dynamics of gear[M]. Beijing: Science Press, 1997: 11-48. (In Chinese)
- [2] CUI L, ZHAI H, ZHANG F. Research on the meshing stiffness and vibration response of cracked gears based on the universal equation of gear profile[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 94: 80-95.
- [3] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gear mesh stiffness[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2009, 28(3): 461-468.
- [4] CHEN Z, SHAO Y. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth[J]. Engineering Failure Analysis, 2011, 18(8): 2149-2164.
- [5] COOLEY C G, LIU C, DAI X, et al. Gear tooth mesh stiffness: A comparison of calculation approaches[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 105: 540-553.
- [6] 李亚鹏, 孙伟, 魏静, 等. 齿轮时变啮合刚度改进计算方法[J]. 机械传动, 2010, 34(5): 22-26.
LI Y P, SUN W, WEI J, et al. Study on the improved algorithm of the time-varying meshing stiffness of gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2010, 34(5): 22-26. (In Chinese)

- nese)
- [7] CHANG L, LIU G, WU L. A robust model for determining the mesh stiffness of cylindrical gears[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 87: 93–114.
- [8] WAN Z, CAO H, ZI Y, *et al.* An improved time-varying mesh stiffness algorithm and dynamic modeling of gear-rotor system with tooth root crack[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2014, 42: 157–177.
- [9] LIANG X, ZUO M J, PANDEY M. Analytically evaluating the influence of crack on the mesh stiffness of a planetary gear set[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 76: 20–38.
- [10] GU X, VELEX P, SAINSOT P, *et al.* Analytical investigations on the mesh stiffness function of solid spur and helical gears[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2015, 137(6): 063301.
- [11] HEDLUND J, LEHTOVAARA A. A parameterized numerical model for the evaluation of gear mesh stiffness variation of a helical gear pair[J]. *Drive System Technique*, 2012, 222(7): 1321–1327.
- [12] 常乐浩, 刘更, 郑雅萍, 等. 一种基于有限元法和弹性接触理论的齿轮啮合刚度改进算法[J]. *航空动力学报*, 2014, 29(3): 682–688.
CHANG L H, LIU G, ZHENG Y P, *et al.* A modified method for determining mesh stiffness of gears based on finite element method and elastic contact theory[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2014, 29(3): 682–688. (In Chinese)
- [13] 刘宝山, 杜群贵, 文奇. 考虑安装误差的斜齿轮啮合刚度计算与分析[J]. *机械传动*, 2017(3): 33–37.
LIU B S, DU Q G, WEN Q. Calculation and analysis of meshing stiffness of helical gear considering installation error[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2017(3): 33–37. (In Chinese)
- [14] LIU L, DING Y, WU L, *et al.* Effects of contact ratios on mesh stiffness of helical gears for lower noise design[C]//*International Gear Conference 2014*. Lyon: Chandos Publishing, 2014: 320–329.
- [15] WAN Z, CAO H, ZI Y, *et al.* Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 92: 447–463.
- [16] HAN L, QI H. Influences of tooth spalling or local breakage on time-varying mesh stiffness of helical gears[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2017, 79: 75–88.
- [17] CHEN S, TANG J, HU Z. Comparisons of gear dynamic responses with rectangular mesh stiffness and its approximate form[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2015, 29(9): 3563–3569.
- [18] 林腾蛟, 何泽银, 钟声, 等. 船用齿轮箱多体动力学仿真及声振耦合分析[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2015, 42(2): 22–28.
LIN T J, HE Z Y, ZHONG S, *et al.* Multi-body dynamic simulation and vibro-acoustic coupling analysis of marine gearbox[J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2015, 42(2): 22–28. (In Chinese)
- [19] SAINSOT P, VELEX P, DUVERGER O. Contribution of gear body to tooth deflections—A new bidimensional analytical formula[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(4): 748–752.