

位错与纳米裂纹干涉的反平面问题

肖万伸[†], 席俊平

(湖南大学 机械与运载工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘要:针对位错与纳米裂纹干涉的反平面问题,提出了一种新方法,得出了精确解.首先利用复变函数中的保角变换方法,将直线裂纹问题化为孔板问题,再借助于柯西积分,获得了该问题的精确解答,然后分别推导出有、无表面效应作用时的应力场和位错力的解析表达式.数值结果表明:当裂纹尺寸缩减到纳米量级时,表面效应的影响使裂纹尖端附近的应力场和位错力减小,但随着裂纹长度的增大,表面效应的影响能力逐渐减弱,含表面效应的解答逐渐趋近于无表面效应的经典弹性理论解答.

关键词:表面效应;纳米裂纹;螺型位错;应力场;位错力

中图分类号:O343.1

文献标志码:A

Anti-plane Problem of Interaction between Dislocation and Nanoscale Crack

XIAO Wanshen[†], XI Junping

(College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: A new method was presented to exactly solve the anti-plane problem of the interaction between a dislocation and nanoscale crack. Firstly, the problem of straight line crack was turned into an orifice plate problem by using conformal mapping method of the complex function. Secondly, the exact solutions of this problem were obtained by Cauchy integral theorem. Then, the stress field and image force with and without surface effect were formulated. The numerical results show that the stress field near crack tip and image force are decreased due to the surface effect when crack size is reduced to the nanometer level. However the influence of the surface effect can be gradually weakened with the increase of the crack length, and the solutions considering the surface effect approach to the classical elastic theory solutions without the surface effect.

Key words: surface effects; nanoscale crack; screw dislocations; stress field; image force

近年来,关于含表/界面效应缺陷断裂问题的研究已得到越来越多国内外学者的关注.其中, Gurtin和 Murdoch^[1]首次进行了弹性材料的表/界面效应问

题的研究,并提出了“表/界面效应模型”,且随着相关表/界面效应问题的深入研究,该模型已被广泛应用.方棋洪等^[2]运用复势函数方法和位错理论,对压

* 收稿日期:2018-02-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11572118), National Natural Science Foundation of China(11572118)

作者简介:肖万伸(1959—),男,湖南道县人,湖南大学教授,博士

[†] 通讯联系人, E-mail: xwshndc@163.com

电材料中螺型位错与含界面效应纳米夹杂的干涉进行了研究.Luo 等^[3]应用保角变换,将一个无限大基体中的椭圆纳米夹杂变换成圆环纳米夹杂,分析了螺型位错与椭圆纳米夹杂的相互干涉作用.Kim 等^[4]针对受无穷远剪切应力作用的Ⅲ型直线裂纹的问题,进行了研究和分析,发现其含表面效应的应力场与裂纹长度有关.Wang 等^[5]研究了含表面效应的Ⅲ型直线裂纹与螺型位错之间的相互作用.然而,到目前为止,关于含表面效应影响的裂纹问题的研究,他们均未给出精确解答.

有鉴于此,本文以螺型位错与纳米裂纹干涉的反平面问题为例,提出了一种新的方法,从而获得了该问题的精确解答.首先,基于 Gurtin-Murdoch 表/界面理论,建立二维模型图.然后,采用复变函数中的保角变换方法和柯西积分方法进行求解.最后,在得到有、无表面效应的应力场和位错力的表达式后,分析和讨论各自的变化规律.

1 问题的描述与解答

如图 1 所示,剪切模量为 μ 的均匀无限大弹性体,包含一条长度为 $2a$ 的直线纳米裂纹,在任意点 z_0 有一个 Burgers 矢量为 b_z 的螺型位错,且在无穷远处受到反平面剪切应力 τ 的作用.在裂纹表面上,表面弹性模量为 μ^s ,表面残余应力为 τ_0 .

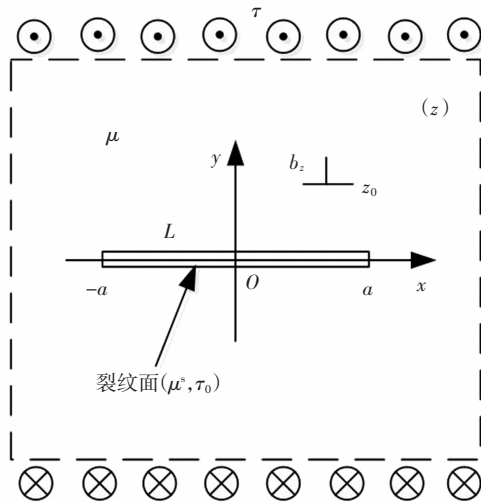


图 1 含表面效应的直线纳米裂纹

Fig.1 Linear nanoscale crack with surface effect

为了便于解决这类直线纳米裂纹问题,构造如下保角变换:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \zeta = \frac{z}{a} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{z} \right)^2} \right] \quad (1)$$

将图 1 所示的 z 平面上含直线纳米裂纹的无穷大弹性体问题变换成图 2 所示 ζ 平面上的孔板问题.

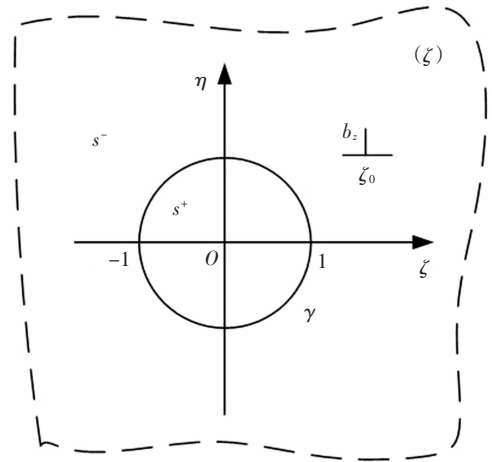


图 2 经变换后的 ζ 平面

Fig.2 The ζ plane after transforming

由弹性理论可知,反平面问题的解答可以用一个解析函数 $\vartheta(z)$ 来表示:

$$w(z) = \text{Re}[\vartheta(z)] \quad (2)$$

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu\vartheta'(z) \quad (3)$$

式中: $w(z)$ 表示反平面位移; $\tau_{xz}, i\tau_{yz}$ 为直角坐标的应力分量.

若考虑表面效应的影响时,裂纹表面上需要应用非经典边界条件.结合 Kim 等^[4]和肖万伸等^[6]的研究,可得其边界条件为:

$$\frac{\mu}{i} [\vartheta(z) - \overline{\vartheta(z)}] = -(\mu^s - \tau_0) [\vartheta'(z) - \overline{\vartheta'(z)}], z \in L \quad (4)$$

则在 ζ 平面上,可变换为:

$$\frac{\mu}{i} [\vartheta_1(\zeta) - \overline{\vartheta_1(\zeta)}] = -(\mu^s - \tau_0) \left[\frac{\vartheta_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\overline{\vartheta_1'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right], \zeta \in \gamma \quad (5)$$

在 z 平面中,由奇性分析可知无限大体的复势函数为:

$$\vartheta(z) = \Gamma z + \frac{b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \vartheta_0(z) \quad (6)$$

式中: $\Gamma = -i\frac{\tau}{\mu}$; $\vartheta_0(z)$ 为解析部分.则变换到 ζ 平面后,可得:

$$\vartheta_1(\zeta) = \frac{\Gamma a}{2} \zeta + \frac{b_z}{2\pi i} \ln(\zeta - \zeta_0) + \vartheta_{10}(\zeta) \quad (7)$$

式中: $\vartheta_{10}(\zeta)$ 为解析部分.将式(7)代入式(5),方程两边进行柯西积分后,可得解:

$$\vartheta_{10}(\zeta) = e^{-\frac{1}{2i\zeta_0}(\zeta + \frac{1}{\zeta})} \int_{\infty}^{\zeta} I(s) e^{\frac{1}{2i\zeta_0}(s + \frac{1}{s})} ds \quad (8)$$

式中:

$$S_e = \frac{\mu^s - \tau_0}{a\mu} \quad (9)$$

$$I(s) = \frac{\bar{\Gamma}a}{4iS_e} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) - \frac{\Gamma a}{2} \frac{1}{s^2} - \frac{b_z}{4\pi S_e} \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \ln\left(\frac{s}{s-\zeta^*}\right) + \frac{b_z}{2\pi i} \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left[\frac{s+\zeta_0}{(s^2-1)(s_0^2-1)} - \frac{1}{(s-\zeta^*)(-1)} \right] \quad (10)$$

将式(8)代入式(7),得考虑表面效应的解析函数

$$\vartheta_1(\zeta) = \frac{\Gamma a}{2} \zeta + \frac{b_z}{2\pi i} \ln(\zeta - \zeta_0) + e^{-\frac{1}{2iS_e}(\zeta + \frac{1}{\zeta})} \int_{\infty}^{\zeta} I(s) e^{\frac{1}{2iS_e}(s + \frac{1}{s})} ds \quad (11)$$

若忽略表面效应的影响,即 $\mu^s = 0, \tau_0 = 0$, 式(4)化简为:

$$\vartheta(z) - \overline{\vartheta(z)} = 0 \quad (12)$$

上式为 z 平面上经典弹性理论问题的边界条件,则在 ζ 平面上相应的边界条件为:

$$\vartheta_2(\zeta) - \overline{\vartheta_2(\zeta)} = 0 \quad (13)$$

其求解过程与考虑表面效应的一致,则无表面效应影响的复势函数

$$\vartheta_2(\zeta) = \frac{\Gamma a}{2} \zeta + \frac{\bar{\Gamma} a}{2\zeta} + \frac{b_z}{2\pi i} [\ln(\zeta - \zeta_0) - \ln(\zeta - \zeta^*) + \ln \zeta] \quad (14)$$

2 应力场和位错力

根据式(3)(11)和(14),可得弹性反平面的应力场.

考虑表面效应的影响时,应力场为:

$$\tau_{xz1} - i\tau_{yz1} = \mu\Gamma - \frac{\mu}{iaS_e} e^{-\frac{1}{2iS_e}(\zeta + \frac{1}{\zeta})} \int_{\infty}^{\zeta} I(s) e^{\frac{1}{2iS_e}(s + \frac{1}{s})} ds + \frac{\mu b_z}{i\pi a} \left[\frac{\zeta_0^2}{(\zeta_0^2-1)(\zeta-\zeta_0)} - \frac{\zeta_0^2}{(\zeta-\zeta^*)(\zeta_0^2-1)} \right] + \frac{\mu\bar{\Gamma}}{2iS_e} \frac{1}{\zeta} - \frac{\mu b_z}{2\pi a S_e} \ln\left(\frac{\zeta}{\zeta-\zeta^*}\right) \quad (15)$$

不考虑表面效应的影响时,应力场为:

$$\tau_{xz2} - i\tau_{yz2} = \mu \left[\frac{\Gamma\zeta^2 - \bar{\Gamma}}{(\zeta^2-1)} + \frac{b_z}{2\pi i\omega'(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta-\zeta_0} - \frac{1}{\zeta-\zeta^*} + \frac{1}{\zeta} \right) \right] \quad (16)$$

将含表面效应的应力场公式(15)和无表面效应的应力场公式(16)均减去相应螺型位错在无穷大体内产生的应力场,并令 $z \rightarrow z_0$ 取极限,便得到位错点的扰动应力场 $\tau_{xzk}(z_0), \tau_{yzk}(z_0)$ 。

$$\tau_{xzk}(z_0) - i\tau_{yzk}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\tau_{xzk} - i\tau_{yzk} - \frac{\mu b_z}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0} \right] \quad (k=1,2) \quad (17)$$

$$\text{式中: } z-z_0 = \frac{a}{2} \left(\zeta - \zeta_0 + \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0} \right).$$

将式(15)和(16)分别代入式(17),可得:

$$\tau_{xz1}(z_0) - i\tau_{yz1}(z_0) = \frac{\mu\bar{\Gamma}}{2iS_e} \frac{1}{\zeta} - \frac{\mu b_z}{2\pi a S_e} \ln\left(\frac{\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta^*}\right) + \mu\Gamma - \frac{\mu}{iaS_e} e^{-\frac{1}{2iS_e}(\zeta + \frac{1}{\zeta})} \int_{\infty}^{\zeta} I(s) e^{\frac{1}{2iS_e}(s + \frac{1}{s})} ds + \frac{\mu b_z}{i\pi a} \left[\frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)^2} - \frac{1}{(\zeta_0-\zeta^*)(\zeta_0^2-1)} \right] \quad (18)$$

$$\tau_{xz2}(z_0) - i\tau_{yz2}(z_0) = \mu \frac{\Gamma\zeta_0^2 - \bar{\Gamma}}{(\zeta_0^2-1)} -$$

$$\frac{\mu b_z}{i\pi a} \left[\frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)(\zeta_0\zeta_0-1)} + \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)^2} \right] \quad (19)$$

根据 Peach-Koehler 公式^[8],可以得到位错力:

$$f_x - if_y = ib_z [\tau_{xzk}(z_0) - i\tau_{yzk}(z_0)], (k=1,2) \quad (20)$$

将式(17)和(18)分别代入式(20),得到位错力:

$$f_{x1} - if_{y1} = -\frac{\mu b_z}{aS_e} e^{-\frac{1}{2iS_e}(\zeta_0 + \frac{1}{\zeta_0})} \int_{\infty}^{\zeta_0} I(s) e^{\frac{1}{2iS_e}(s + \frac{1}{s})} ds + i\mu b_z \Gamma + \frac{\mu b_z \bar{\Gamma}}{2S_e} \frac{1}{\zeta_0} - \frac{i\mu b_z^2}{2\pi a S_e} \ln\left(\frac{\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta^*}\right) + \frac{\mu b_z^2}{\pi a} \left[\frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)^2} - \frac{1}{(\zeta_0-\zeta^*)(\zeta_0^2-1)} \right] \quad (21)$$

$$f_{x2} - if_{y2} = ib_z \mu \frac{\Gamma\zeta_0^2 - \bar{\Gamma}}{(\zeta_0^2-1)} - \frac{\mu b_z^2}{\pi a} \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)(\zeta_0\zeta_0-1)} - \frac{\mu b_z^2}{\pi a} \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)^2} \quad (22)$$

当 z 平面中的螺型位错位于 x 轴上,且令 $z_0 = x_0 > a$,得 ζ 平面中位错的位置

$$\zeta_0 = \frac{x_0}{a} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_0}\right)^2} \right] = \zeta_0 \quad (23)$$

由式(21)~(23),可得螺型位错在 x 轴上的位错力:

$$f_{x1} - if_{y1} = -\frac{\mu b_z}{aS_e} e^{-\frac{1}{2iS_e}(\zeta_0 + \frac{1}{\zeta_0})} \int_{\infty}^{\zeta_0} I(s) e^{\frac{1}{2iS_e}(s + \frac{1}{s})} ds + i\mu b_z \Gamma + \frac{\mu b_z \bar{\Gamma}}{2S_e} \frac{1}{\zeta_0} - \frac{i\mu b_z^2}{2\pi a S_e} \ln\left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta_0^2 - 1}\right) \quad (24)$$

$$f_{x2} - if_{y2} = ib_z \mu \frac{\Gamma\zeta_0^2 - \bar{\Gamma}}{(\zeta_0^2-1)} - \frac{2\mu b_z^2}{\pi a} \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2-1)^2} \quad (25)$$

3 数值分析与讨论

3.1 应力场

在这一部分,为便于分析表面效应对应力场的

影响,假设无限大弹性体中无螺型位错,只在无穷远处受剪切应力 τ 的作用.根据 Sharma 等^[9]的研究,纳米裂纹的表面参数可取为: $\mu^s = 161.73 \text{ J/m}^2, \tau_0 = 1.3 \text{ J/m}^2, \mu = 168 \text{ GPa}$.

图 3 画出了当 $\tau = 0.1\mu$ 时,本文和文献[4]的含表面效应影响时无量纲裂纹尖端应力场 τ_{yz1}/μ 随着 S_e 变化的曲线.特此说明,通常的材料切应力不可能达到文献[4]的 $\tau = 0.1\mu$,但为了与该文献对比完整起见,这里也把切应力取到了 0.1μ .由该图可知,两曲线的变化趋势一致,但在 $S_e = 0$ 附近有明显差异,这是因为文献[4]的求解结果是以级数表示的,只能得出近似解,而本文的结果为精确解.此外,从该图可以看出,裂纹尖端的无量纲应力场 τ_{yz1}/μ 为实数值,且随着 S_e 的增大而减小,而由式(9)可知, S_e 的大小与裂纹长度 a 成反比,则说明表面效应的影响和裂纹长度 a 有关,裂纹长度 a 越大即 S_e 越小,表面效应的影响越弱,裂纹尖端应力场越大.

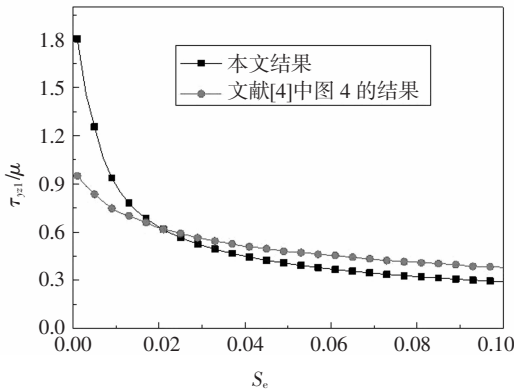


图 3 当 $\tau = 0.1\mu$ 时,含表面效应的无量纲裂纹尖端应力场 τ_{yz1}/μ 随 S_e 的变化

Fig.3 Dimensionless stress field containing surface effect at the crack tip τ_{yz1}/μ versus S_e for $\tau = 0.1\mu$

图 4 为当 $\tau = 0.1\mu$ 时,无量纲应力场 τ_{yz}/μ 随着相对位置 x/a 变化的数值曲线图,图中的经典弹性理论曲线对应于不考虑表面效应影响的解.从图中可以看出,当不考虑表面效应的影响时,随着相对位置 x/a 的逐渐增大,即离裂纹尖端越来越远,无量纲应力场 τ_{yz2}/μ 迅速减小,后趋于平稳,且在裂纹尖端处为正无穷大.而考虑表面效应的影响时,其整体变化趋势与无表面效应的一致,但其数值始终小于不考虑表面效应时的数值,且在裂纹尖端处为实数值.此外,当相对位置 x/a 固定时, S_e 越小,表面效应的影响越弱,含表面效应的无量纲应力场 τ_{yz1}/μ 越大,越趋近于无界面效应的数值,即越接近于经典理论的解答.

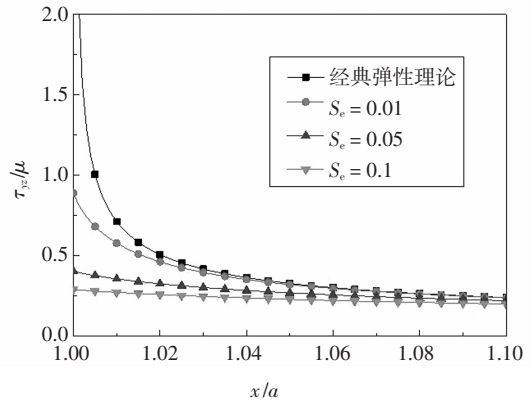


图 4 当 $\tau = 0.1\mu$ 时,无量纲应力场 τ_{yz}/μ 随 x/a 的变化
Fig.4 Dimensionless stress field τ_{yz}/μ versus x/a for $\tau = 0.1\mu$

3.2 位错力

在这一部分,为分析表面效应对位错力的影响,假设无限大弹性体中的无穷远处受剪切应力 τ 不计,螺型位错位于 x 轴上点 $x_0 (z_0 = \bar{z}_0 = x_0 > a)$ 处,式(24)和式(25)可化简为:

$$f_{x1} - if_{y1} = -\frac{\mu b_z}{a S_e} e^{-\frac{1}{2iS_e}(\zeta_0 + \frac{1}{\zeta_0})} \int_{\infty}^{\zeta_0} Y(s) e^{\frac{1}{2iS_e}(s + \frac{1}{s})} ds - \frac{i\mu b_z^2}{2\pi a S_e} \ln\left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta_0^2 - 1}\right) \quad (26)$$

$$f_{x2} - if_{y2} = -\frac{2\mu b_z^2}{\pi a} \frac{\zeta_0}{(\zeta_0^2 - 1)^2} \quad (27)$$

式中

$$Y(s) = \frac{b_z}{2\pi i} \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \left[\frac{s + \zeta_0}{(s^2 - 1)(\zeta_0^2 - 1)} - \frac{1}{(s - \zeta^*)(\zeta_0^2 - 1)} \right] - \frac{b_z}{4\pi S_e} \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \ln\left(\frac{s}{s - \zeta^*}\right) \quad (28)$$

图 5 画出了本文和文献[5]的含表面效应的无量纲位错力 $f_{x1}\pi a/\mu b_z^2$ 随螺型位错相对位置 x_0/a 变化的数值曲线图.由该图可知,两种曲线的变化趋势

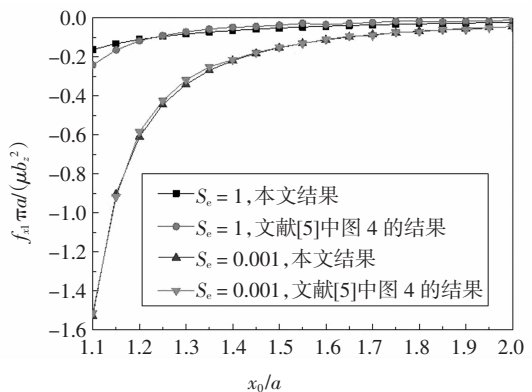


图 5 含表面效应的无量纲位错力 $f_{x1}\pi a/\mu b_z^2$ 随螺型位错相对位置 x_0/a 的变化

Fig.5 Dimensionless image force $f_{x1}\pi a/\mu b_z^2$ with surface effect versus the relative position of screw dislocation x_0/a

一致,只有细微差别,这是因为文献[5]的求解结果为近似解,而本文的结果为精确解.该图表明,随着位错和裂纹尖端距离的减小,即 x_0/a 的减小,裂纹一直吸引位错,位错力为负且绝对值逐渐增大.当螺型位错的相对位置不变时, S_e 越小,即裂纹长度 a 越大,表面效应的影响能力越弱,无量纲位错力 $f_x \pi a / \mu b_z^2$ 的绝对值就越大.

图6为无量纲位错力 $f_x \pi a / \mu b_z^2$ 随螺型位错相对位置 x_0/a 变化的数值曲线图,其中经典理论曲线对应于不考虑表面效应影响的曲线.由图可知,当不考虑表面效应的影响时,随着位错和裂纹尖端距离的减小,即 x_0/a 的减小,无表面效应影响的位错力为负且绝对值逐渐增大,裂纹一直吸引位错.而考虑表面效应作用的位错力 $f_x \pi a / \mu b_z^2$ 的变化趋势与无表面效应作用的变化趋势一致,但 $f_x \pi a / \mu b_z^2$ 的绝对值总小于无表面效应作用时的绝对值,这是因为表面效应的存在,使裂纹尖端附近的应力场明显变小,可看成考虑表面效应时,裂纹表面产生了一个作用在位错上的额外排斥力,且排斥力总是小于吸引力,位错力的方向保持不变.此外,当位错相对位置 x_0/a 固定时,随着 S_e 的减小即裂纹长度 a 越大,产生的额外排斥力逐渐减小,表面效应影响能力逐渐减弱,含表面效应的位错力 $f_x \pi a / \mu b_z^2$ 的绝对值越来越逼近于无表面效应作用时的绝对值,且在 $S_e = 0.001$ 时,含表面效应的位错力解答近似等于经典弹性理论解答.

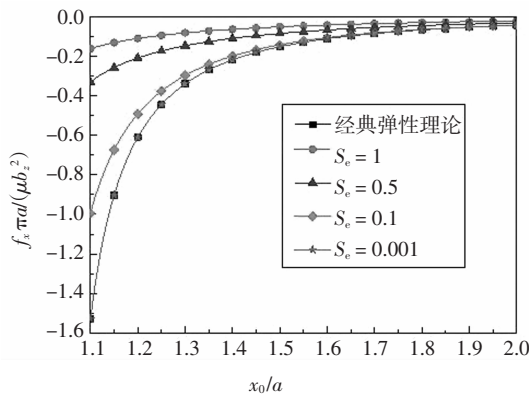


图6 无量纲位错力 $f_x \pi a / \mu b_z^2$ 随螺型位错相对位置 x_0/a 的变化

Fig.6 Dimensionless image force $f_x \pi a / \mu b_z^2$ versus the relative position of screw dislocation x_0/a

4 结论

针对螺型位错与纳米裂纹干涉的反平面问题,本文摒弃了以往只能得出近似解的求解方法,提出

了一种可获得精确解的新方法,并推导出有、无表面效应作用时的应力场和位错力的解析表达式.由本文研究可知:

1) 在分析表面效应对应力场和位错力的影响时,先画出了本文和文献[4]、文献[5]的曲线对比图.由对比图来表明新方法的可行性.新方法以往方法的不同之处、以及新方法的优势所在.

2) 含表面效应的应力场 τ_{yz} 和位错力 f_x 的变化趋势和无表面效应作用时一致,但其数值始终小于无表面效应作用时的数值,且随着 S_e 的减小即裂纹长度 a 的增大,表面效应的影响能力逐渐减弱,并逐渐趋近于无表面效应的经典弹性理论解答.

参考文献

- [1] GURTIN M E, MURDOCH A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1975, 57(4):291—323.
- [2] 方棋洪, 许维, 冯慧, 等. 压电螺型位错与含界面效应纳米夹杂干涉研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2012, 39(4): 31—36.
FANG Q H, XU W, FENG H, et al. Interaction between a screw dislocation and a nanoscale inhomogeneity with interaction effects [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2012, 39(4): 31—36. (In Chinese)
- [3] LUO J, XIAO Z M. Analysis of a screw dislocation interacting with an elliptical nano inhomogeneity [J]. International Journal of Engineering Science, 2009, 47(9):883—893.
- [4] KIM C I, SCHIAVONE P, RU C Q. The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode-III crack: complete Solution [J]. Journal of Applied Mechanics, 2010, 77(2):293—298.
- [5] WANG X, FAN H. Interaction between a nanocrack with surface elasticity and a screw dislocation [J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 2015, 22(2):1—13.
- [6] 肖万伸, 邹小珊, 邹伟生. 抛物线裂纹反平面弹性问题的解析解 [J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2012, 39(8):39—42.
XIAO W S, ZOU X S, ZOU W S. An analytical solution for the antiplane elastic problem with a parabolic crack [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2012, 39(8):39—42. (In Chinese)
- [7] LEE S. The image force on the screw dislocation around a crack of finite size [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1987, 27(5):539—545.
- [8] FANG Q H, LIU Y W. Size-dependent interaction between an edge dislocation and a nanoscale inhomogeneity with interface effects [J]. Acta Materialia, 2006, 54(16):4213—4220.
- [9] SHARMA P, GANTI S. Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano inclusions incorporating surface/interface energies [J]. Journal of Applied Mechanics, 2005, 72(4):663—671.