

文章编号:1674-2974(2016)11-0020-06

考虑斜坡效应的桩柱式桥梁基桩稳定性分析^{*}

尹平保^{1,4†},赵明华²,赵衡³,贺炜^{1,4}

- (1. 长沙理工大学 土木与建筑学院,湖南长沙 410114; 2. 湖南大学 岩土工程研究所,湖南长沙 410082; 3. 中南大学 资源与安全工程学院,湖南长沙 410083; 4. 长沙理工大学 桥梁结构安全控制湖南省工程实验室,湖南长沙 410114)

摘要:考虑坡面以下一定深度范围内地基抗力非线性分布模式,建立了基桩稳定性分析简化计算模型及桩-坡体系总势能方程.据此导得了斜坡段桩柱式桥梁基桩临界荷载与计算长度的能量法解答,并通过平地 and 斜坡两种不同情况下的室内模型试验验证理论计算方法的合理性.由此进行的参数分析表明:增大墩柱弹性模量或减小墩柱高度(高长比)均可提高基桩稳定性,当高长比取 0.3~0.4 时,基桩稳定性最佳;当边坡坡度在 25°~35° 范围内时,基桩稳定性受斜坡效应的影响较小,设计时应尽量将基桩设置在坡度小于 35° 的边坡上.斜坡段地基抗力比例系数 m 与坡度 α 之间的相互影响关系尚有待深入研究.

关键词:桥梁工程;基桩;稳定性;能量法;斜坡效应

中图分类号:TU473

文献标识码:A

Stability Analysis of Pile-column Bridge Pile Considering Slope Effect

YIN Ping-bao^{1,4†}, ZHAO Ming-hua², ZHAO Heng³, HE Wei^{1,4}

- (1. School of Civil Engineering and Architecture, Changsha Univ of Science and Technology, Changsha, Hunan 410114, China; 2. Geotechnical Institute of Hunan Univ, Changsha, Hunan 410082, China; 3. School of Resources and Safety Engineering of Central South Univ, Changsha, Hunan 410083, China; 4. Hunan Province Engineering Laboratory of Bridge Structure (Changsha University of Science & Technology), Changsha, Hunan 410114, China)

Abstract: The soil resistance is a nonlinear function varying with depth, and it is related to the effect of location in slopes. The simplified model for a pile-column bridge pile and the total potential energy equation of pile-slope system were presented by considering the slope effect. The analytical solution of the critical load and calculated length were derived based on the energy method. In this respect, verification between the measurement and theoretical solution was conducted by dissimilar conditions in plain and slope. The parametric study shows: the increase of the Young's modulus of the pier column or decrease of its free length enhances the stability of the pile foundation; the appointed elastic modulus of pier column corresponds to an optimal column-height, and the best stability is achieved while the ratio is in the range of 0.3 to 0.4. Moreover, a key conclusion from observations is that the bridge pile should be located at the slope with the gradient less than 35° for safety. However, the correlation between m and α is of significance so

* 收稿日期:2015-11-07

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51408066,51478051), National Natural Science Foundation of China(51408066,51478051); 湖南省交通科技计划项目(201014); 长沙理工大学桥梁工程领域开放基金项目(14KA06,14KB07); 长沙理工大学土木工程优势特色重点学科创新性项目(16ZDXK02)

作者简介:尹平保(1984-),男,湖南邵阳人,长沙理工大学讲师,博士

† 通讯联系人, E-mail: pingbaby921@163.com

that it needs to be further investigated.

Key words: bridge engineering; piles foundation; stability; energy method; slope effect

在西部山区修建桥梁工程,多采用桩柱式桥梁基桩,且往往将其设置在斜坡甚至悬崖峭壁上.与普通的桥梁基桩相比,位于斜坡上的桩柱式桥梁基桩具有坡度陡、墩柱高(普遍在 30 m 以上)等特点.因此,无论是受力分析还是稳定性计算,目前尚缺乏统一完善的技术标准或规定,给工程设计与施工带来极大不便,从而导致斜坡段桥梁基桩稳定性问题日益突出^[1-3].

有关基桩稳定性问题,自 20 世纪 60 年代以来,国内外已有许多学者对其展开了一些有益研究,如:美国学者 Lee(1968),利用钢管和铝管模拟基桩,进行了相应的室内模型试验研究^[4];随后 Reddy (1970)利用能量法对完全或部分入土桩的稳定性进行了理论研究^[5].自 20 世纪 90 年代以来,国内学者赵明华(1990)、彭锡鼎(1996)、杨维好(2000)等,基于 m 法假定和能量原理,求解了不同边界条件下基桩屈曲能量方程,并得到了基桩屈曲临界荷载及稳定计算长度理论公式^[6-8].近年来,郭红雨(2007)、Zou(2007)、姚文娟(2009)、张永兴(2010)等,从复杂地基抗力、初始弯矩和后屈曲等方面对基桩屈曲稳定性问题进行了深入的理论与数值分析研究^[9-12].但针对斜坡上桩柱式桥梁基桩稳定性问题,目前国内外尚鲜有报道.

鉴于此,本文拟在现有研究的基础上,根据斜坡段桩柱式桥梁基桩的工程特点,考虑斜坡段桩前岩土体侧向约束弱化效应,建立相应的简化计算模型,并利用能量原理求解基桩临界荷载与计算长度,进而依托工程实例开展参数分析,以此探讨设计中的关键问题.

1 斜坡效应分析

在各向同性、单层均质场地上,平地桩在任一截面均呈轴对称(图 1(a)),且桩侧 Nd 范围内的岩土体均可提供有效的地基抗力;而斜坡段基桩(图 1(b)),因桩前存在一临空面,使得基桩前、后岩土体不再对称,从而导致桩前 Nd (距桩顶 $h = Nd \tan \alpha$) 范围内岩土体所能提供的地基抗力与平地桩相比明显减弱.这种因斜坡存在而导致的桩前岩土体地基抗力弱化现象称为斜坡效应.其中, $h = Nd \tan \alpha$ 为斜坡效应影响深度; Nd 为斜坡效应影响宽度; d 为桩径; N 为斜坡效应系数,一般可取 $3 \sim 5$ ^[13].

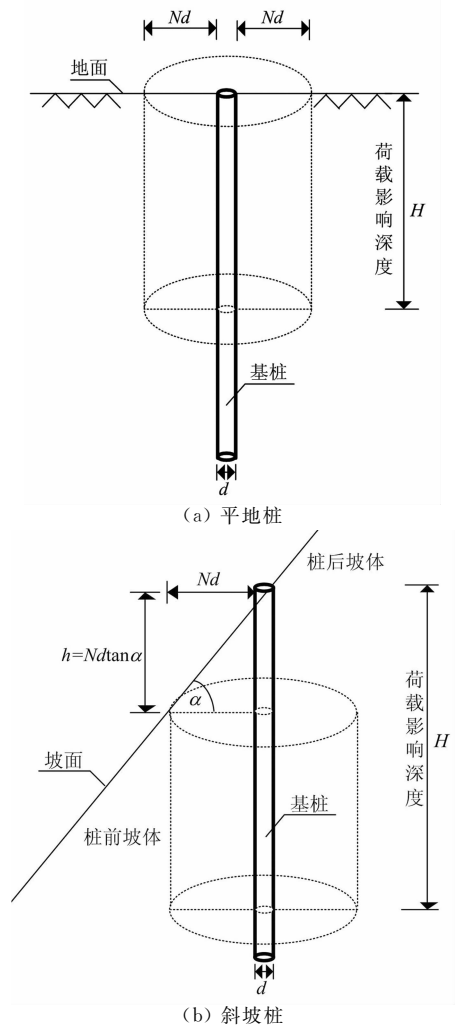


图 1 斜坡效应示意图
Fig. 1 The sketch of slope effect

2 方程建立与求解

2.1 基本假定

为建立斜坡段桩柱式桥梁基桩稳定性分析模型,据其承载状况、边界条件等,特作如下假定:

1) 山区斜坡段桩柱式桥梁基桩一般都为嵌岩桩,即可假定桩底为完全固定约束.通常情况下,桩顶主要包含自由、弹嵌、嵌固和铰支 4 种约束.对于桥梁基桩,其桩顶往往受盖梁、支座等弹性约束,并非完全自由或嵌固,故可假定为弹嵌.据此可假定“桩底嵌固,桩顶弹嵌”边界下基桩挠曲变形函数为^[6]:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \left(1 - \cos \frac{i\pi}{l} z \right) \quad (1)$$

式中: x 为桩身水平位移; z 为计算点至桩底的距离

(坐标原点设在桩底中心); c_i 为待定系数; l 为基桩总长; n 为半波数;

2) 假定基桩仅发生平面内运动,即不考虑基桩空间上的弯扭或转动,且桩身各截面沿横向始终保持为一完整平面,并与纵向垂直^[6];

3) 忽略桩身自重、桩侧摩阻力对基桩屈曲稳定性的影响^[14];

4) 为考虑斜坡效应,根据 m 法假定 h 深度范围内桩侧地基抗力系数沿深度呈非线性发展,则桩侧地基抗力 $p(x, z)$ 表达式为:

$$p(x, z) = C(z)b_1x = mf(z)b_1x = \begin{cases} m \frac{(H-z)^2}{h} b_1x & (H-h < z \leq H) \\ m(H-h-z)b_1x & (0 < z \leq H-h) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $p(x, z)$ 为桩侧地基抗力; m 为地基抗力比例系数; b_1 为桩身计算宽度; H 为基桩入土深度; $C(z)$ 为桩侧地基抗力系数,其在 h 深度内的变化发展模式如图 2 所示,式中其他参数同前.

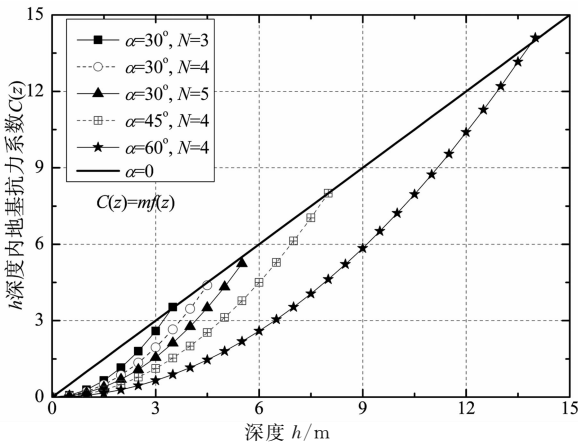


图 2 h 深度内地基抗力系数 $C(z)$ 变化示意图
Fig. 2 The soil resistance coefficient $C(z)$ varied with the depth of h

2.2 计算模型

根据上述分析可建立考虑斜坡效应的桩柱式桥梁基桩稳定性简化计算模型,如图 3 所示.

在图 3 所示的计算模型中,将桩柱式桥梁基桩分为 3 段(总长 $l = l_1 + l_2 + l_3$):嵌固段(l_1)、斜坡效应影响段(l_2)以及墩柱段(l_3),其中 $l_2 = h = Nd \tan \alpha$, α 为边坡坡度; $E_2 I_2$ 为墩柱抗弯刚度; $E_1 I_1$ 为基桩抗弯刚度; P 为桩顶竖向荷载;坐标原点定为桩底中心.

2.3 总势能方程的建立

首先建立桩-坡体系总势能方程.由图 3 可知,桩-坡体系的总势能 P 应由基桩弯曲应变能 U_p 、桩侧岩土体弹性变形能 U_s 以及桩顶竖向荷载势能 V_p

组成^[6]:

$$\Pi = U_p + U_s + V_p \quad (3)$$

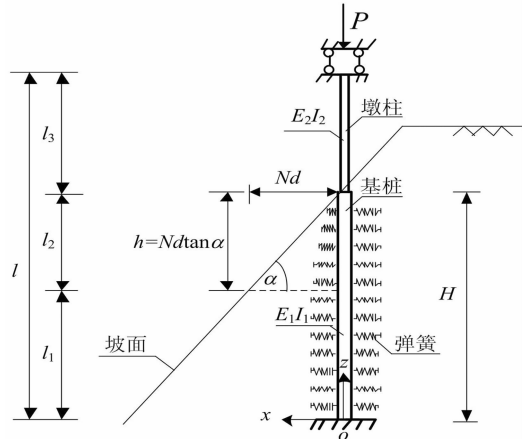


图 3 简化计算模型

Fig. 3 The simplified calculation model

基桩弯曲变形产生的应变势能 U_p 为^[6]:

$$U_p = \frac{E_1 I_1}{2} \int_0^H (x')^2 dz + \frac{E_2 I_2}{2} \int_H^l (x'')^2 dz \quad (4)$$

式中: $H = l_1 + l_2$, x' , x'' 分别为挠曲变形函数 x 的一、二阶导数,式中其他参数同前.

桩侧岩土体弹性变形能 U_s 为^[6]:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^H p(x, z) x dz \quad (5)$$

桩顶竖向荷载势能 V_p 为^[6]:

$$V_p = -\frac{1}{2} P \int_0^l (x')^2 dz \quad (6)$$

从而可得桩-坡体系总势能方程为:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E_1 I_1}{2} \int_0^H (x')^2 dz + \frac{E_2 I_2}{2} \int_H^l (x'')^2 dz \\ & + \frac{1}{2} \int_0^H p(x, z) x dz - \frac{P}{2} \int_0^l (x')^2 dz \quad (7) \end{aligned}$$

2.4 能量法解答

将式(1)及其一、二阶导数、式(2)代入式(7),积分后整理可得:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E_1 I_1 - E_2 I_2}{4l^4} \Phi(A) + \frac{mb_1(Hh - H^2)}{2h} \Phi(B) - \\ & \frac{mb_1(h + 2H)}{2h} \Phi(D) + \frac{bm_1 H^2}{2h} \Phi(E) + \frac{mb_1 H}{h} \Phi(F) + \\ & \frac{mb_1}{2h} [\Phi(G) - \Phi(J)] + \left(\frac{E_2 I_2 \pi^4}{4l^4} - \frac{P \pi^2}{4l} \right) \sum_{i=1}^n c_i^2 i^2 \quad (8) \end{aligned}$$

式(8)中的 $\Phi(\chi)$ 函数表达式为:

$$\Phi(\chi) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \chi_{ii} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_i c_j \chi_{ij} \quad (9)$$

式中: $\chi = A, B, D, E, F, G, J$; χ_{ii}, χ_{ij} 为与 $d, \alpha, l, h, H, i(i=1, 2, \dots, n), j(j=1, 2, \dots, n)$ 等有关的系数.

对式(8)取变分,并令 $\frac{\partial \prod}{\partial c_i} = 0$,可得:

$$(K_{ii} - X)c_i + K_{ij}c_j = 0 \tag{10}$$

式中: $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} X$; $EI = \frac{E_1 I_1 H + E_2 I_2 (l - H)}{l}$;

$$K_{ii} = \frac{4l^3}{\pi^4 EI_i} \left[\frac{\pi^4}{4l^4} (E_1 I_1 A_{ii} - E_2 I_2 A_{ii} + E_2 I_2 i^4) + \frac{mb_1 (hH - H^2)}{2h} (B_{ii} - D_{ii}) + \frac{mb_1 H}{2h} (HE_{ii} - 2F_{ii}) + \frac{mb_1 H}{2h} (G_{ii} - J_{ii}) \right]$$

$$K_{ij} = \frac{4l^3}{\pi^4 EI_i} \left[\frac{\pi^4}{4l^4} (E_1 I_1 - E_2 I_2) A_{ij} + \frac{mb_1 H (h - H)}{2h} B_{ij} + \frac{mb_1 (2H - h)}{2h} D_{ij} + \frac{mb_1 H}{2h} (HE_{ij} - 2F_{ij}) + \frac{mb_1}{2h} (G_{ij} - J_{ij}) \right]$$

式(10)可写成矩阵方程形式:

$$[K]\{C\} = \{0\} \tag{11}$$

式(11)中含有 n 个变量 $c_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$,

要使其具有非零解,则其系数行列式必为零,即:

$$|K| = 0 \tag{12}$$

式(12)即为基桩稳定性分析的特征方程.

根据式(12)可求得 n 个特征根,设其最小正根为 X_{min} ,则基桩临界荷载 P_{cr} 和计算长度 L_{cr} 为:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} X_{min} \tag{13}$$

$$L_{cr} = \frac{l}{\sqrt{X_{min}}} \tag{14}$$

3 试验验证

3.1 试验 1

为验证计算方法的可靠性,以文献[14]中的试验桩为例进行对比分析.计算时取边坡坡度 $\alpha = 0$,从而将斜坡桩退化为平地桩,并取 $n = 30$,其他参数取值与文献[14]中的试验参数相同(见表 1),具体计算结果如表 2 所示.

表 1 试验基本参数

Tab. 1 The parameters of conventional test

桩号	桩长 H/m	桩径 d_1/m	柱长 l_3/m	柱径 d_2/m	桩身刚度 $E_1 I_1 / (N \cdot m^2)$	墩柱刚度 $E_2 I_2 / (N \cdot m^2)$	地基系数 $m / (kN \cdot m^{-4})$
1	0.30	0.041	1.20	0.034	1.169	0.652	1 359
2	0.50	0.042	1.00	0.034	1.277	0.790	482
3	0.75	0.042	0.75	0.034	1.290	0.560	846
4	0.30	0.041	1.20	0.034	1.203	0.580	2 240
5	0.50	0.041	1.00	0.034	1.187	0.592	1 061
6	0.75	0.042	0.75	0.035	1.298	0.572	864

由表 2 可以看出,理论计算结果与试验实测结

果吻合较好(最大误差不足 10%),验证了本文计算方法的可行性.上述计算过程可通过编制相关的 MATLAB 程序实现求解.

表 2 理论与试验结果对比

Tab. 2 Comparison between the theory and test results

桩号	基桩临界荷载 P_{cr}/N			误差 /%
	文献[14]值	实测值	理论值	
1	2 840	2 811	2 847	1.28
2	4 016	4 005	3 835	-4.24
3	2 925	2 895	2 931	1.24
4	2 340	2 313	2 342	1.25
5	2 889	2 836	3 011	6.17
6	3 110	2 994	3 165	5.71

3.2 试验 2

以张(家界)—花(垣)高速公路中的某实际工程桩为原型,开展了不同坡度下基桩竖向承载室内模型试验,如图 4 所示.该模型试验采用 PPR 管模拟基桩,采用不均匀系数为 $C_u = 8.57$,曲率系数 $C_c = 1.05$ 的粗砂模拟桩周土体.模型基桩外径 $d_1 = 63$ mm,内径 $d_2 = 58$ mm.桩长 $l = 1 200$ mm,其中埋入坡体中的长度 $H = 800$ mm;桩身弹性模量 $E = 1 680$ MPa.实测桩侧地基抗力系数、基桩竖向屈曲临界荷载 P_{cr} 以及理论计算结果如表 3 所示.



(a) 45° 斜坡

(b) 60° 斜坡

图 4 斜坡段基桩模型试验图

Fig. 4 Model test of piles in slope

表 3 斜坡桩模型试验与理论结果对比

Tab. 3 Comparison between the theory and model test results of piles in slope

坡度 / (°)	地基系数 $m / (kN \cdot m^{-4})$	基桩临界荷载 P_{cr}/N		误差 / %
		实测值	理论值	
0	1 610	8 932	9 447	5.77
30	1 177	8 208	8 725	6.30
45	877	7 514	7 996	6.41
60	635	5 536	6 072	9.68

由表 3 可以看出,理论计算结果与室内模型试验结果相差不大,60° 斜坡基桩的计算误差达

9.68%,这是因为实际情况中的地基抗力比例系数 m 值随斜坡坡度呈非线性变化,从而造成理论计算模型假定与实际情况有一定差别.

4 工程实例分析

张(家界)一花(垣)高速公路某桥梁采用桩柱式基础,基桩所在边坡坡度 $\alpha=30^\circ\sim 50^\circ$;基桩长 $H=25.0\text{ m}$;基桩直径 $d_1=2.0\text{ m}$;墩柱高 $l_3=8.0\text{ m}$;墩柱直径 $d_2=1.8\text{ m}$.基桩采用C25混凝土,其弹性模量 $E_1=28\text{ GPa}$;墩柱采用C30混凝土,其弹性模量 $E_2=30\text{ GPa}$;桩侧地基抗力比例系数 $m=60\text{ MN/m}^4$; $n=30$; $N=5$;基桩竖向设计荷载 $P_{st}=6\ 519\text{ kN}$.以该基桩为例,重点分析墩柱弹性模量 E_2 、高长比 l_3/l (墩柱高度 l_3 与基桩总长 l 之比)以及边坡坡度 α 对基桩稳定性的影响.

保持其他参数不变,仅改变墩柱弹性模量 E_2 值($0.6E_2, 0.8E_2, 1.0E_2, 1.2E_2$)计算得到不同 E_2 下基桩无量纲临界荷载 \bar{P}_{cr} ,无量纲计算长度 \bar{L}_{cr} 与高长比 l_3/l 间的关系曲线,见图5和图6.

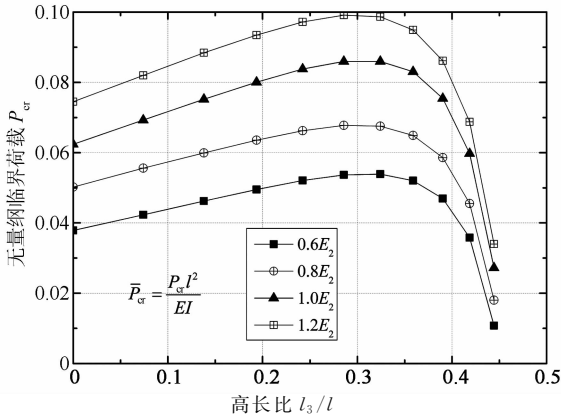


图5 不同 E_2 下 $\bar{P}_{cr}-l_3/l$ 关系曲线

Fig. 5 The relationship of $\bar{P}_{cr}-l_3/l$ in different E_2

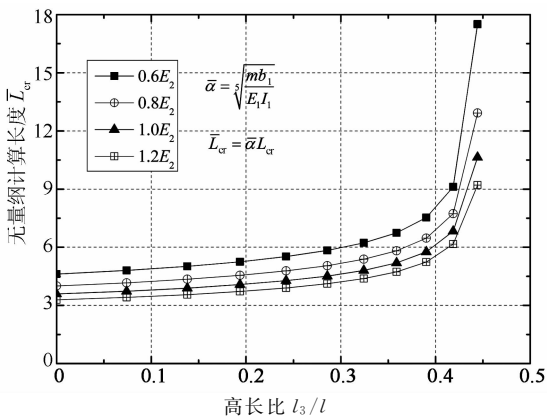


图6 不同 E_2 下 $\bar{L}_{cr}-l_3/l$ 关系曲线

Fig. 6 The relationship of $\bar{L}_{cr}-l_3/l$ in different E_2

由图5可知,当高长比 l_3/l 相同时,增大墩柱弹性模量 E_2 ,基桩临界荷载值随之增大,此与文献[14]所得结论完全吻合.但当墩柱弹性模量 E_2 相同时,随高长比 l_3/l 增加,基桩临界荷载随之先小幅增大,后急剧减小.这是因为基桩整体刚度 $EI=[E_1 I_1 H+E_2 I_2(l-H)]/l$ 受墩柱弹性模量 E_2 和长度 l_3 共同影响,即: E_2 增大,导致 EI 增大, \bar{P}_{cr} 值增加,有利于基桩稳定;若增大 l_3 (总长 l 变大),将导致 EI 减小, \bar{P}_{cr} 值减小,对基桩稳定不利.另外,从图5和图6还可以发现,当高长比取 $0.3\sim 0.4$ 时,基桩稳定性最佳.由图5和图7可知,不同 E_2 对应的 $\bar{P}_{cr}-l_3/l, \bar{P}_{cr}-\bar{L}_{cr}$ 关系曲线均出现一峰值点,这表明桩身材料刚度与最佳桩长(或最优高长比 l_3/l)存在一一对应关系,据此可对斜坡段桩柱式桥梁基桩进行优化设计.

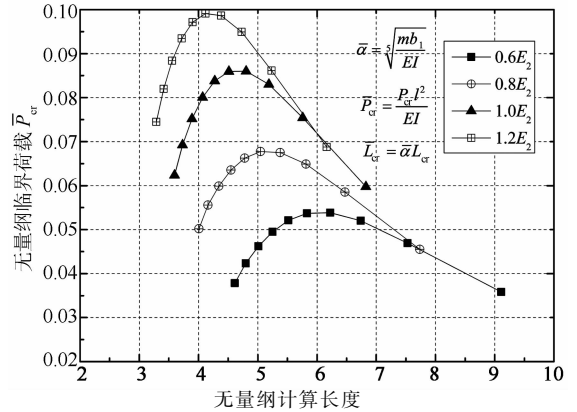


图7 不同 E_2 下 $\bar{P}_{cr}-\bar{L}_{cr}$ 关系曲线

Fig. 7 The relationship of $\bar{P}_{cr}-\bar{L}_{cr}$ in different E_2

保持其他参数不变,仅改变边坡坡度 α ,计算得到基桩无量纲临界荷载 \bar{P}_{cr} ,无量纲计算长度 \bar{L}_{cr} 与边坡坡度正切值 $\tan \alpha$ 间的关系曲线,如图8所示.

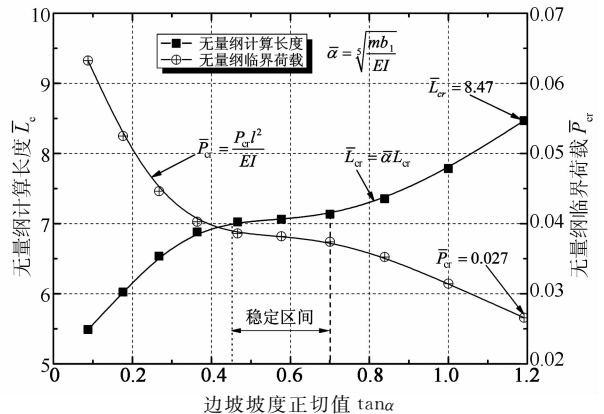


图8 边坡坡度 α 的影响

Fig. 8 The parametric factor of slope gradient α

由图8可以发现,当墩柱高度相同时,边坡坡度正切值 $\tan \alpha$ 越大,基桩无量纲临界荷载值 \bar{P}_{cr} (右边

纵坐标,空心圆点),先急剧减小,再缓慢减小,然后又急剧减小;而基桩无量纲计算长度值 \bar{L}_{cr} (左侧纵坐标,实心方点)则与之相反,这说明边坡坡度对基桩稳定性的影响非常显著.当 $0.45 < \tan\alpha < 0.70$ (即 $25^\circ < \alpha < 35^\circ$) 时,基桩无量纲临界荷载 \bar{P}_{cr} 与无量纲计算长度 \bar{L}_{cr} 变化幅度很小,即存在一个受斜坡效应影响较小的相对稳定区间;离该稳定区间越远 ($\alpha < 0.45$ 或 $\alpha > 0.70$) ($\alpha < 25^\circ$ 或 $\alpha > 35^\circ$),基桩稳定性受斜坡效应的影响越显著.因此,设计时应重视斜坡效应对基桩稳定性的影响,尽量将基桩设置在坡度 $\alpha < 35^\circ$ 的斜坡上.

将基桩竖向设计荷载及桩长无量纲化,可得其无量纲设计荷载 $\bar{P}_{st} = 0.0068$,无量纲设计桩长 $\bar{L}_{st} = 12.87$.再结合图 8 可得最不利状况(坡度 $\alpha = 50^\circ$, $\tan\alpha = 1.19$)下基桩无量纲临界荷载 $\bar{P}_{cr} = 0.027$,无量纲计算长度 $\bar{L}_{cr} = 8.47$.二者比值分别为: $\bar{P}_{cr}/\bar{P}_{st} = 3.97$, $\bar{L}_{st}/\bar{L}_{cr} = 1.52$.由此可见,基桩竖向承载稳定性满足要求;目前该桥梁已建成通车,施工及运行期间均未现安全隐患.

5 结 论

首先根据斜坡段桩柱式桥梁基桩承载特性,建立了考虑斜坡效应的基桩稳定性分析简化计算模型;然后利用能量原理导得了基桩临界荷载与计算长度公式,并通过算例验证其可行性;最后以某实际工程为例开展参数分析得到如下结论:

1) 增大墩柱刚度或减小墩柱高度均可提高基桩稳定性;高长比为 $0.3 \sim 0.4$ 时,基桩稳定性最佳.对斜坡基桩,可根据墩柱弹性模量与最优高长比之间的关系确定最合理的桩材和桩长;

2) 边坡坡度对基桩稳定性的影响非常明显,当边坡坡度在 $25^\circ \sim 35^\circ$ ($0.45 < \tan\alpha < 0.70$) 范围内时,基桩稳定性受斜坡效应的影响较小;设计时尽量将基桩设置在坡度小于 35° 的边坡上;

3) 有关斜坡段地基抗力比例系数 m 与斜坡坡度之间的相互影响关系尚有待开展相应的试验研究.

参考文献

[1] 邹新军,陈少玉,尹帮顺,等.基桩动力稳定性模型试验研究[J].湖南大学学报:自然科学版,2012,39(12):19-24.
ZOUZ Xin-jun, CHEN Shao-yu, YIN Bang-shun, et al. Model test for dynamic stability of piles[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2012, 39(12): 19-24. (In Chinese)

[2] 张永杰,李侑军,赵明华,等.高陡斜坡作用下群桩基础设计计算方法[J].中国公路学报,2014,27(10):84-92.
ZHANG Yong-jie, LI You-jun, ZHAO Ming-hua, et al. De-

sign and calculation method for pile group foundation in high and steep slope[J]. China Journal of Highway and Transport, 2014, 27(10): 84-92. (In Chinese)

[3] 尹平保,赵明华,杨明辉,等.考虑 $P-\Delta$ 效应的陡坡段桥梁双桩结构受力分析[J].湖南大学学报:自然科学版,2012,39(1):1-6.
YIN Ping-bao, ZHAO Ming-hua, YANG Ming-hui, et al. Force analysis of bridge double-pile in high and steep slope with consideration of $P-\Delta$ effect[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2012, 39(1): 1-6. (In Chinese)

[4] LEE K L. Buckling of partially embedded piles in sand[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1968, 94(1): 255-270.

[5] REDDY A S, VALSANGKAR A J. Buckling of fully and partially embedded piles[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1970, 96(6): 1951-1965.

[6] 赵明华.桥梁桩基的屈曲分析及试验[J].中国公路学报,1990,3(4):47-57.
ZHAO Ming-hua. Buckling analysis and tests of bridge piles [J]. China Journal of Highway and Transport, 1990, 3(4): 47-57. (In Chinese)

[7] 彭锡鼎.考虑桩侧土壤弹性抗力时桩的临界荷载计算[J].土木工程学报,1996,29(5):43-48.
PENG Xi-ding. Calculation of critical load of pile considering resistance of soil on the side of pile[J]. China Civil Engineering Journal, 1996, 29(5): 43-48. (In Chinese)

[8] 杨维好,任彦龙.端部嵌固桩的稳定性分析[J].岩石力学与工程学报,2000,19(3):380-382.
YANG Wei-hao, REN Yan-long. Axial buckling analysis of bottom-fixed pile[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(3): 380-382. (In Chinese)

[9] 郭红雨,贾艳敏.用能量法确定考虑冻胀力和冻土抗力作用时桩基的临界荷载[J].工程力学,2007,24(7):167-173.
GUO Hong-yu, JIA Yan-min. Determination of critical loads for piles by energy method considering frost heave forces and resistance to deformation of frozen soil[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(7): 167-173. (In Chinese)

[10] ZOU Xin-jun, ZHAO Ming-hua, LIU Guang-dong. Buckling analysis of super-long rock-socketed filling piles in soft soil area by element free Galerkin method [J]. Journal of Central South University, 2007, 14(6): 858-863.

[11] 姚文娟,仇元忠,程泽坤.超长嵌岩桩初始后屈曲性状分析[J].岩土工程学报,2009,31(5):738-742.
YAO Wen-juan, QIU Yuan-zhong, CHENG Ze-kun. Initial post-buckling analysis for super-long rock-socketed piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(5): 738-742. (In Chinese)

[12] 张永兴,陈林,吴曙光.基于 Wiegardt 地基基桩稳定性分析[J].岩土工程学报,2010,32(S2):9-12.
ZHANG Yong-xing, CHEN Lin, WU Shu-guang. Stability analysis of pile on a Wiegardt-type elastic foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(S2): 9-12. (In Chinese)

[13] 赵明华,刘涛,杨超炜,等.考虑陡坡效应的横向受荷桩受力分析纽玛克解答[J].公路交通科技,2014,31(10):58-64.
ZHAO Ming-hua, LIU Tao, YANG Chao-wei, et al. Analysis of laterally loaded pile on Newmark numerical method considering steep slopes effect[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2014, 31(10): 58-64. (In Chinese)

[14] 汪优.高桥墩桩基稳定性分析及其优化设计研究[D].长沙:湖南大学土木工程学院,2007:81-97.
WANG You. Buckling analysis and optimization design for piles foundation with high bridge piers[D]. Changsha: College of Civil Engineering, Hunan University, 2007, 81-97. (In Chinese)