

双半挂汽车列车两种建模方法的对比研究^{*}

王郭俊,许洪国,刘宏飞[†]

(吉林大学 交通学院,吉林 长春 130022)

摘要:为建立基于线性轮胎特性的双半挂汽车列车四自由度动力学模型,提出了一种从整体角度分析的建模方法.双半挂汽车列车由牵引车、第一节半挂车和第二节半挂车共计三个车辆单元组成.该方法采用对三个车辆单元进行受力和力矩平衡分析,对第二个和第三个车辆单元进行力矩平衡分析,对第三个车辆单元进行力矩平衡分析,可列出四个微分方程并进一步进行求解.与传统的分别对三个车辆单元进行受力和力矩平衡分析,列出的六个微分方程相比,整体法的优势在于无需过多代入求解车辆单元间的约束条件,减少了化简中的繁琐步骤,可有效防止计算过程中出错.在牵引车前轮角阶跃输入下,通过 MATLAB 仿真求解,两种方法的仿真结果一致,验证了整体法建模的正确性,为下一步建立更复杂的多挂汽车列车系统动力学模型奠定了基础.对低速和高速工况下的双半挂汽车列车各物理参数的仿真结果分别进行分析,发现其存在后部放大效应,且高速工况下更容易失稳,进一步验证了整体法仿真结果的正确性.

关键词:车辆工程;双半挂汽车列车;动力学建模;仿真;角阶跃输入

中图分类号: U469.5

文献标志码: A

Comparative Study on Two Modeling Methods for B-double Vehicles

WANG Guojun, XU Hongguo, LIU Hongfei[†]

(School of Transportation, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: To develop a four-degrees-of-freedom (DOF) dynamic model for B-double vehicles based on linear tire characteristics, a modeling method was proposed where the system was studied from a whole view. B-double vehicles were made of three vehicle units, including tractor, first semitrailer and second semitrailer. This method carried out the analysis on force and moment equilibrium of three vehicle units, moment equilibrium of second and third vehicle unit, and moment equilibrium of third vehicle unit, and then four differential equations were deduced and solved further. Compared with traditional method taking the analysis on force and moment equilibrium of each vehicle unit, respectively, six differential equations were then deduced. The advantages of whole method were that it did not need to overmuch substitute and solve the constraint conditions between vehicle unit, which decreased the tedious procedures during simplification and avoided the errors in calculations effectively. With the step angle input of tractor steering

^{*} 收稿日期:2017-03-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51475199), National Natural Science Foundation of China(51475199); 运输车辆运行安全技术交通运输行业重点实验室开放课题资助(KFKT2016-01)

作者简介:王郭俊(1990-),男,湖北襄阳人,吉林大学博士研究生

[†] 通讯联系人, E-mail: hongfeiliu@jlu.edu.cn

wheel, simulation results of these two methods are the same as that of MATLAB, which verifies the validity of the whole method and lays the foundation for more complex dynamic model of multi-trailers combination vehicles in the next step. The results of physical parameter simulation for B-double vehicles were analyzed under low speed and high speed working conditions, respectively. It indicates that B-double vehicles possess rearward amplification (RWA) and are prone to instability more easily at high speed, which further verifies the validity of whole method.

Key words: vehicle engineering; B-double vehicles; dynamics modeling; simulation; step angle input

汽车列车在大型物流运输中极为重要,采用双半挂汽车列车形式,可提高甩挂运输效率,节约能源,经济效益好。目前在 GB1589—2016 中,新增了中置轴运输车及其列车、中置轴货运挂车及其列车和长头铰接列车等^[1]。因此,建立双半挂汽车列车系统动力学模型,分析其仿真结果,对汽车列车的操纵稳定性控制和实际运用有重要的理论指导意义。

文献[2]建立了拖挂车辆包括半挂车和全挂车的多轮车辆模型,给出半挂车的车轴模型并分析其运动稳定性。黄朝胜等^[3]建立了较为精细的牵引车-半挂车的整车动力学仿真模型,对其折叠、甩尾、侧翻及转向瞬态响应进行了仿真,确定了模型的适用范围。王国林等^[4]根据达朗贝尔原理建立了八自由度半挂汽车列车数学模型,并用 Matlab/Simulink 对其联合仿真,进而进行转向和制动测试,验证了所建模型的正确性。包继华等^[5]提出利用牛顿定律和拉格朗日算子方法分别建立车辆系统的平动和横摆微分方程,建模过程中不考虑车辆单元之间的约束力,降低了复杂度。文献[6]建立了半挂汽车列车操纵简化模型,并对牵引车稳定性因数和半挂车稳定性因数进行分析。文献[7]建立了半挂车和全挂车多轴模型的运动方程,建立了半挂车二轮模型的运动方程并分析其静态和动态稳定性。Luijten M F J 等^[8]利用拉格朗日方程建立了铰接式汽车列车动力学模型并研究其侧向动力学特性。房永^[9]运用坐标转换和拉格朗日方程建立了三自由度半挂汽车列车简化模型,用以研究横摆稳定性控制算法。常胜等^[10]建立了包含车身侧倾和转向系刚度的车辆模型,并对其鞍座参数进行调试和匹配,分析参数变化对系统稳定性的影响。文献[11]运用拉格朗日方程和达朗贝尔原理建立了汽车-挂车组合的运动方程,分析了该四阶系统的稳定性。Lin X 等^[12]建立了三自由度半挂汽车列车模型,在高速工况下对半挂车进行主动转向最优控制,提高了其横摆稳定性,运用 TruckSim 和 Matlab/Simulink 联合仿真验证了算

法的有效性。孙扬^[13]建立了线性四自由度全挂汽车列车模型并给出推导过程,对其操纵稳定性和控制策略进行了分析。Mendes A S 等^[14]介绍了可用于 MATLAB 仿真求解的车辆侧向动力学软件包,给出了其中关于铰接式车辆数学模型的计算方法,包括多种轮胎模型和线性、非线性车辆模型。Mobini F 等^[15]建立了非线性四自由度半挂汽车模型,对制动力进行最优控制以提高其行驶稳定性。Sonawane H 等^[16]运用多体动力学方法建立了半挂汽车列车模型并对其稳态操纵性能进行优化。文献[17]提出了一种综合主动转向控制方法,高速时可提高全挂车的侧向稳定性,低速时可改善全挂车的轨迹跟随性,使后部放大效应(RWA)下降了 30%。

参照物体受力分析的两种方法,即隔离法和整体法,分别用这两种方法建立双半挂汽车列车四自由度模型,并给出推导过程;以隔离法做参照,验证整体法求解结果的一致性;对整体法的仿真结果进行分析,进一步验证模型的正确性。

1 建模过程

1.1 隔离法

如图 1 所示,B 型双半挂汽车列车的结构形式是由牵引车、第一节半挂车和第二节半挂车共计三个车辆单元组成;各车辆单元间通过鞍座形式联结,共计两个铰接点。



图 1 双半挂汽车列车侧视图
Fig. 1 Side view for B-double vehicles

牵引车在前轮角阶跃输入下进行稳态圆周运动时,假设条件为:忽略转向系统的影响,直接以前轮转角作为输入;忽略悬架的作用,整个车身只做平行

于地面的平面运动;沿 x 轴的纵向速度 v_x 视为不变;忽略左右轮胎由于载荷变化引起的轮胎特性变化和轮胎回正力矩的作用,可得简化后的双半挂汽车列车单轨模型;侧向加速度限定在 $0.4 g$ 以下,轮胎侧偏特性处于线性范围内;各车辆单元的后轴一般为多轴形式,需简化为轮胎集中的单轴形式.由此可得,双半挂汽车列车简化为沿 y 轴侧向运动和绕 z 轴横摆运动的模型,如图 2 所示.其四个自由度分别为:牵引车的侧向速度 v_y ,牵引车的横摆角速度 r ,第一个铰接点的铰接角速度 $\dot{\theta}_1$,第二个铰接点的铰接角速度 $\dot{\theta}_2$.

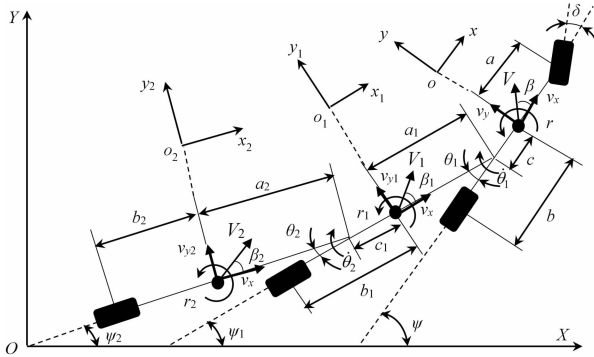


图 2 双半挂汽车列车四自由度模型
Fig. 2 B-double vehicles model with four DOF

XOY 为大地坐标系, xoy 、 $x_1o_1y_1$ 和 $x_2o_2y_2$ 分别为固结于牵引车、第一节半挂车和第二节半挂车质心的车辆坐标系.大地坐标系与车辆坐标系间的夹角分别为 ψ 、 ϕ_1 和 ϕ_2 ,其分别为牵引车、第一节半挂车和第二节半挂车的横摆角,对其求导得各车辆单元的横摆角速度为 r 、 r_1 和 r_2 . a 、 b 和 c 分别为牵引车质心到其前轴、后轴和铰接点的距离, a_1 、 b_1 和 c_1 分别为第一节半挂车质心到其前方铰接点、后轴和后方铰接点的距离, a_2 和 b_2 分别为第二节半挂车质心到其铰接点和后轴的距离. δ 为牵引车前轮偏转角, β 、 β_1 和 β_2 分别为各车辆单元的质心侧偏角. V 、 V_1 和 V_2 分别为各车辆单元的质心合速度, v_x 为各车辆单元的纵向速度, v_y 、 v_{y1} 和 v_{y2} 分别为各车辆单元的侧向速度. θ_1 为牵引车与第一节半挂车间的铰接角, $\dot{\theta}_1$ 为其角速度; θ_2 为第一节半挂车与第二节半挂车间的铰接角, $\dot{\theta}_2$ 为其角速度.

隔离法受力分析如图 3 所示.双半挂汽车列车各轴轮胎侧偏角为 α_f 、 α_r 、 α_1 和 α_2 ,产生侧向力为 F_{yf} 、 F_{yr} 、 F_{y1} 和 F_{y2} .各铰接点受到的侧向力为 F_1 和 F_2 ,各自为一对作用力与反作用力,分别在不同的车辆坐标系中.

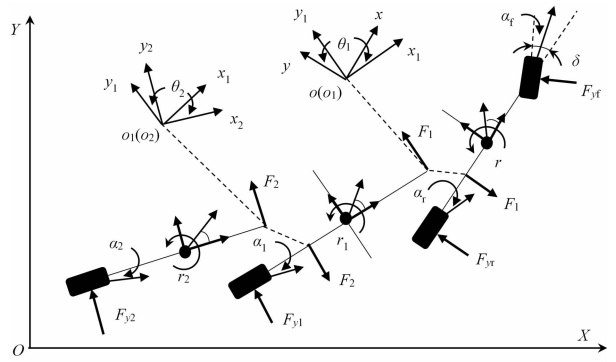


图 3 隔离法受力分析图
Fig. 3 Force analysis using isolation method

牵引车的质心航向角为其质心侧偏角与横摆角之和,即 $\beta + \psi$.对其求导得航向角速度为 $\dot{\beta} + r$.牵引车的质心侧向加速度为 $a_y = V(\dot{\beta} + r)$.假设 β 较小,则 $v_x = V \cos \beta \approx V$, $\beta \approx \tan \beta = v_y / v_x$, $\dot{\beta} \approx \dot{v}_y / v_x$,整理得

$$a_y = \dot{v}_y + v_x r \quad (1)$$

则第一节和第二节半挂车的质心侧向加速度为

$$a_{yi} = \dot{v}_{yi} + v_x r_i \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

各轴轮胎侧偏角为

$$\alpha_f = \delta - \frac{v_y + ar}{v_x}, \quad \alpha_r = -\frac{v_y - br}{v_x},$$

$$\alpha_i = -\frac{v_{yi} - b_i r_i}{v_x} \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

依据线性轮胎的侧偏特性,各轴轮胎侧向力为 $F_{yi} = k_i \alpha_i$ ($i = f, r, 1, 2$)
隔离牵引车分析,由侧向力平衡和横摆力矩平衡,得

$$m a_y = F_{yf} + F_{yr} - F_1 \quad (5)$$

$$I_z \dot{r} = a F_{yf} - b F_{yr} + c F_1 \quad (6)$$

同理,对第一节和第二节半挂车进行分析,得

$$m_1 a_{y1} = F_1 + F_{y1} - F_2 \quad (7)$$

$$I_{z1} \dot{r}_1 = a_1 F_1 - b_1 F_{y1} + c_1 F_2 \quad (8)$$

$$m_2 a_{y2} = F_2 + F_{y2} \quad (9)$$

$$I_{z2} \dot{r}_2 = a_2 F_2 - b_2 F_{y2} \quad (10)$$

各铰接点存在约束.经推导知,牵引车后方铰接点的侧向速度为 $v_y - cr$,第一节半挂车前方铰接点的侧向速度为 $v_{y1} + a_1 r_1$,在车辆坐标系 xoy 和 $x_1o_1y_1$ 下,利用投影定律,得 $v_x \sin \theta_1 + (v_y - cr) \cos \theta_1 = v_{y1} + a_1 r_1$.假设 θ_1 较小,则 $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, $\cos \theta_1 \approx 1$,整理得

$$v_{y1} = v_x \theta_1 + v_y - cr - a_1 r_1 \quad (11)$$

同理,第一节半挂车后方铰接点的侧向速度为 $v_{y1} - c_1 r_1$,第二节半挂车前方铰接点的侧向速度为 $v_{y2} + a_2 r_2$,在车辆坐标系 $x_1o_1y_1$ 和 $x_2o_2y_2$ 下,利用投影定律可得 $v_x \sin \theta_2 + (v_{y1} - c_1 r_1) \cos \theta_2 = v_{y2} +$

$a_2 r_2$. 假设 θ_2 较小, 则 $\sin\theta_2 \approx \theta_2, \cos\theta_2 \approx 1$, 整理得

$$v_{y2} = v_x \theta_2 + v_{y1} - c_1 r_1 - a_2 r_2 \quad (12)$$

各铰接点的其他约束条件为

$$\begin{cases} r_1 = r - \dot{\theta}_1 \\ r_2 = r_1 - \dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (13)$$

联立上述各式消去 F_1 和 F_2 , 得

$$\begin{cases} ma_y + m_1 a_{y1} + m_2 a_{y2} = F_{yf} + F_{yr} + F_{y1} + F_{y2} \\ cma_y + I_z \dot{r} = (c+a)F_{yf} + (c-b)F_{yr} \\ c_1 m_1 a_{y1} + I_{z1} \dot{r}_1 = (c_1+a_1)(F_{yf} + F_{yr} - ma_y) + (c_1-b_1)F_{y1} \\ a_2 m_2 a_{y2} - I_{z2} \dot{r}_2 = (a_2+b_2)F_{y2} \end{cases} \quad (14)$$

将式(1)~(4)及约束条件式(11)~(13)代入式(14), 使微分方程组中的变量仅含 v_x, v_y, r, θ_1 和 θ_2 等物理量及其一阶导数或二阶导数. 第一节和第二节半挂车的侧向速度和横摆角速度可通过约束条件式(11)~(13)求解.

令状态向量 $\mathbf{X} = [v_y, r, \dot{\theta}_1, \theta_1, \dot{\theta}_2, \theta_2]^T$, 输入向量为 $\mathbf{U} = [\delta]$, 输出向量为 $\mathbf{Y} = [v_y, r, \dot{\theta}_1, \theta_1, \dot{\theta}_2, \theta_2, v_{y1}, r_1, v_{y2}, r_2]^T$. 将微分方程组写为矩阵形式 $\mathbf{P}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{Q}\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, 得状态空间的方程式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U} \end{cases} \quad (15)$$

其中, $\mathbf{D} = [0], \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 和 \mathbf{C} 矩阵分别为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} m+m_1+m_2 & -m_1(c+a_1)-m_2(c+L_{c1}+a_2) & & & & \\ mc & & I_z & & & \\ mL_{c1}+m_1c_1 & & I_{z1}-m_1c_1(c+a_1) & & & \\ m_2a_2 & -I_{z2}-m_2a_2(c+L_{c1}+a_2) & & & & \\ 0 & & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & \\ m_1a_1+m_2(L_{c1}+a_2) & 0 & m_2a_2 & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -I_{z1}+m_1a_1c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ I_{z2}+m_2a_2(L_{c1}+a_2) & 0 & I_{z2}+m_2a_2^2 & & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\mathbf{Q} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{k_f+k_r+k_1+k_2}{v_x} & & q_{12} & & & \\ \frac{L_c k_f - (b-c)k_r}{v_x} & & mcv_x + \frac{aL_c k_f - b(c-b)k_r}{v_x} & & & \\ \frac{L_{c1}(k_f+k_r) + (c_1-b_1)k_1}{v_x} & & q_{32} & & & \\ \frac{L_2 k_2}{v_x} & & m_2 a_2 v_x - \frac{L_2(c+L_{c1}+L_2)k_2}{v_x} & & & \\ 0 & & 0 & & & \\ 0 & & 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1 k_1 + (L_{c1} + L_2) k_2}{v_x} & k_1 + k_2 & \frac{L_2 k_2}{v_x} & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(c_1 - b_1) L_1 k_1}{v_x} & (c_1 - b_1) k_1 & 0 & 0 \\ \frac{L_2(L_{c1} + L_2) k_2}{v_x} & L_2 k_2 & \frac{L_2^2 k_2}{v_x} & L_2 k_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中, \mathbf{Q} 矩阵中的其他元素为

$$\begin{cases} q_{12} = (m+m_1+m_2)v_x + \frac{ak_f - bk_r}{v_x} - \frac{(c+L_1)k_1 - (c+L_{c1}+L_2)k_2}{v_x} \\ q_{32} = mL_{c1}v_x + m_1c_1v_x + \frac{L_{c1}(ak_f - bk_r) - (c_1-b_1)(L_1+c)k_1}{v_x} \end{cases} \quad (18)$$

$$\mathbf{R} = [k_f, L_c k_f, L_{c1} k_f, 0, 0, 0]^T \quad (19)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -c+a_1 & a_1 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -c+L_{c1} & L_{c1}+a_2 & v_x & a_2 & v_x \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(16)~(20)的其他字符表达式为

$$\begin{cases} L = a + b, L_c = a + c \\ L_1 = a_1 + b_1, L_{c1} = a_1 + c_1 \\ L_2 = a_2 + b_2 \end{cases} \quad (21)$$

1.2 整体法

整体法受力分析如图4所示, 已知的物理量包括 v_x, v_y, r, θ_1 和 θ_2 及其一阶导数和二阶导数.

牵引车质心的侧向加速度 a_y 求解同式(1), 其前轴和后轴侧偏角求解同式(4), 其前轴和后轴侧向力求解同式(5). 牵引车和第一节半挂车当作整体分析, 可得第一节半挂车的质心侧向加速度为

$$a_{y1} = a_y - (c+a_1)\dot{r} + a_1\ddot{\theta}_1 \quad (22)$$

第一节半挂车后轴轮胎的侧向速度分量为

$$v_x \sin \theta_1 + v_y - (c+a_1+b_1)r + (a_1+b_1)\dot{\theta}_1, \text{ 假设 } \theta_1 \text{ 较小, 可得其侧偏角为}$$

$$\alpha_1 = -\frac{v_x \theta_1 + v_y - (c+a_1+b_1)r + (a_1+b_1)\dot{\theta}_1}{v_x} \quad (23)$$

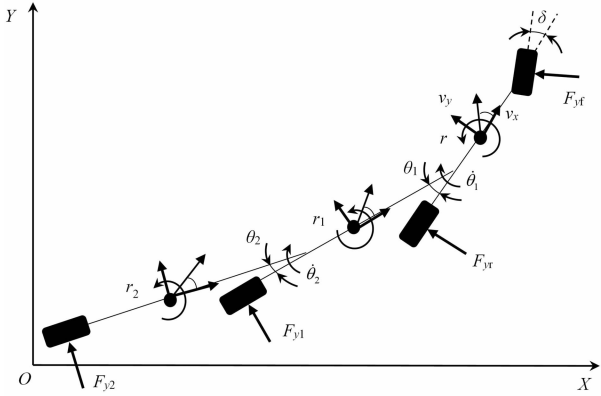


图4 整体法受力分析图

Fig. 4 Force analysis using whole method

则其轮胎侧偏力为

$$F_{y1} = k_1 \left(-\theta_1 - \frac{v_y - (c + a_1 + b_1)r + (a_1 + b_1)\dot{\theta}_1}{v_x} \right) \quad (24)$$

同理，三个车辆单元当作整体分析，可得第二节半挂车的质心侧向加速度为

$$a_{y2} = a_y - (c + a_1 + c_1 + a_2)\dot{r} + (a_1 + c_1 + a_2)\ddot{\theta}_1 + a_2\ddot{\theta}_2 \quad (25)$$

第二节半挂车后轴的侧向速度为 $v_x \sin\theta_1 + v_x \sin\theta_2 + v_y - (c + a_1 + c_1 + a_2 + b_2)r + (a_1 + c_1 + a_2 + b_2)\dot{\theta}_1 + (a_2 + b_2)\dot{\theta}_2$ ，假设 θ_1 和 θ_2 较小，可得其侧偏角为

$$\alpha_2 = -\frac{v_x\theta_1 + v_x\theta_2 + v_y - (c + a_1 + c_1 + a_2 + b_2)r + (a_1 + c_1 + a_2 + b_2)\dot{\theta}_1 + (a_2 + b_2)\dot{\theta}_2}{v_x} \quad (26)$$

则其侧偏力为

$$F_{y2} = k_2 \left[-\theta_1 - \theta_2 - \frac{v_y - (c + a_1 + c_1 + a_2 + b_2)r - (a_1 + c_1 + a_2 + b_2)\dot{\theta}_1 + (a_2 + b_2)\dot{\theta}_2}{v_x} \right] \quad (27)$$

由侧向力平衡，得

$$ma_y + m_1 a_{y1} + m_2 a_{y2} = F_{yf} + F_{yrf} + F_{y1} + F_{y2} \quad (28)$$

由牵引车质心的横摆力矩平衡，得

$$I_z\dot{r} + I_{z1}\dot{r}_1 + I_{z2}\dot{r}_2 - (c + a_1)m_1 a_{y1} - (c + a_1 + c_1 + a_2)m_2 a_{y2} = aF_{yf} - bF_{yrf} - (c + a_1 + b_1)F_{y1} - (c + a_1 + c_1 + a_2 + b_2)F_{y2} \quad (29)$$

第一节和第二节半挂车当作整体分析，由第一个铰接点的横摆力矩平衡，得

$$I_{z1}\dot{r}_1 + I_{z2}\dot{r}_2 - a_1 m_1 a_{y1} - (a_1 + c_1 + a_2)m_2 a_{y2} = - (a_1 + b_1)F_{y1} - (a_1 + c_1 + a_2 + b_2)F_{y2} \quad (30)$$

第二节半挂车当作整体分析，由第二个铰接点的横摆力矩平衡，得

$$I_{z2}\dot{r}_2 - a_2 m_2 a_{y2} = - (a_2 + b_2)F_{y2} \quad (31)$$

将式(1)、(4)、(22)、(24)、(25)和(27)代入式(28)~(31)，使微分方程组中的变量仅含 v_x 、 v_y 、 r 、 θ_1 和 θ_2 等物理量及其一阶导数或二阶导数。联立式(3)、(23)和(26)，可求出第一节和第二节半挂车的侧向速度为

$$\begin{cases} v_{y1} = v_x\theta_1 + v_y - (c + a_1)r + a_1\dot{\theta}_1 \\ v_{y2} = v_x\theta_1 + v_x\theta_2 + v_y - (c + a_1 + c_1 + a_2)r + (a_1 + c_1 + a_2)\dot{\theta}_1 + a_2\dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (32)$$

其横摆角速度可通过式(13)得到。

令状态向量 $\mathbf{X}_1 = [v_y \ r \ \dot{\theta}_1 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_2 \ \theta_2]^T$ ，输入向量为 $\mathbf{U}_1 = [\delta]$ ，输出向量为 $\mathbf{Y}_1 = [v_y \ r \ \dot{\theta}_1 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_2 \ \theta_2 \ v_{y1} \ r_{y2}]^T$ 。将微分方程组写为矩阵形式 $\mathbf{P}_1\dot{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{X}_1 = \mathbf{R}_1\mathbf{U}_1$ ，得状态空间的方程式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_1 = -\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{R}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{U}_1 \\ \mathbf{Y}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{U}_1 \end{cases} \quad (33)$$

其中， $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}$ ， $\mathbf{D}_1 = [0]$ ， \mathbf{P}_1 、 \mathbf{Q}_1 和 \mathbf{R}_1 矩阵分别为

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} m + m_1 + m_2 & & & & & & & & & \\ -m_1(c + a_1) - m_2(c + L_{c1} + a_2) & & & & & & & & & \\ -m_1 a_1 - m_2(L_{c1} + a_2) & & & & & & & & & \\ -m_2 a_2 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & \\ m_1 a_1 + m_2(L_{c1} + a_2) & 0 & m_2 a_2 & 0 & & & & & & \\ p_{123} & 0 & p_{125} & 0 & & & & & & \\ p_{133} & 0 & p_{135} & 0 & & & & & & \\ -I_{z2} - m_2 a_2(L_{c1} + a_2) & 0 & -I_{z2} - m_2 a_2^2 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \end{bmatrix} \quad (34)$$

其中， \mathbf{P}_1 矩阵中的其他元素为

$$\begin{cases}
 p_{112} = -m_1(c+a_1) - m_2(c+L_{c1}+a_2) \\
 p_{122} = I_z + I_{z1} + I_{z2} + m_1(c+a_1)^2 + m_2(c+L_{c1}+a_2)^2 \\
 p_{123} = -I_{z1} - I_{z2} - m_1a_1(c+a_1) - \\
 \quad m_2(L_{c1}+a_2)(c+L_{c1}+a_2) \\
 p_{125} = -I_{z2} - m_2a_2(c+L_{c1}+a_2) \\
 p_{132} = I_{z1} + I_{z2} + m_1a_1(c+a_1) + \\
 \quad m_2(L_{c1}+a_2)(c+L_{c1}+a_2) \\
 p_{123} = -I_{z1} - I_{z2} - m_1a_1^2 - m_2(L_{c1}+a_2)^2 \\
 p_{135} = -I_{z2} - m_2a_2(L_{c1}+a_2)
 \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 = & \\
 & \left[\begin{array}{cccc}
 \frac{k_f + k_r + k_1 + k_2}{v_x} & & & \\
 & (m+m_1+m_2)v_x + q_{121} & & \\
 & q_{121} & q_{122} & \\
 -\frac{L_1k_1 + (L_{c1} + L_2)k_2}{v_x} & & q_{132} & \\
 & & & v_x \\
 -\frac{L_2k_2}{v_x} & \frac{L_2(c+L_{c1}+L_2)k_2}{v_x} - m_2a_2v_x & & \\
 0 & 0 & & \\
 0 & 0 & & \\
 \frac{L_1k_1 + (L_{c1} + L_2)k_2}{v_x} & k_1 + k_2 & \frac{L_2k_2}{v_x} & k_2 \\
 & q_{123} & q_{124} & q_{125} & q_{126} \\
 -\frac{L_1^2k_1 + (L_{c1} + L_2)^2k_2}{v_x} & q_{134} & q_{135} & q_{136} \\
 -\frac{L_2(L_{c1} + L_2)k_2}{v_x} & -L_2k_2 & -\frac{L_2^2k_2}{v_x} & -L_2k_2 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0
 \end{array} \right] \quad (36)
 \end{aligned}$$

其中, Q_1 矩阵中的其他元素为

$$\begin{aligned}
 q_{121} &= \frac{ak_f - bk_r - (c+L_1)k_1 - (c+L_{c1}+L_2)k_2}{v_x} \\
 q_{122} &= -m_1(c+a_1)v_x - m_2(c+L_{c1}+a_2)v_x + \\
 & \quad \frac{a^2k_f + b^2k_r + (c+L_1)^2k_1 + (c+L_{c1}+L_2)^2k_2}{v_x} \\
 q_{123} &= -\frac{L_1(c+L_1)k_1 + (L_{c1}+L_2)(c+L_{c1}+L_2)k_2}{v_x} \\
 q_{124} &= -(c+L_1)k_1 - (c+L_{c1}+L_2)k_2 \\
 q_{125} &= -\frac{L_2(c+L_{c1}+L_2)k_2}{v_x} \\
 q_{126} &= -(c+L_{c1}+L_2)k_2 \\
 q_{132} &= -m_1a_1v_x - m_2(L_{c1}+a_2)v_x + \\
 & \quad \frac{L_1(c+L_1)k_1 + (L_{c1}+L_2)(c+L_{c1}+L_2)k_2}{v_x} \\
 q_{134} &= -L_1k_1 - (L_{c1}+L_2)k_2 \\
 q_{135} &= -\frac{L_2(L_{c1}+L_2)k_2}{v_x} \\
 q_{136} &= -(L_{c1}+L_2)k_2
 \end{aligned} \quad (37)$$

$$R_1 = [k_f \quad ak_f \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (38)$$

式(34)~(38)的其他字符表达式同式(21)。

2 仿真结果验证与分析

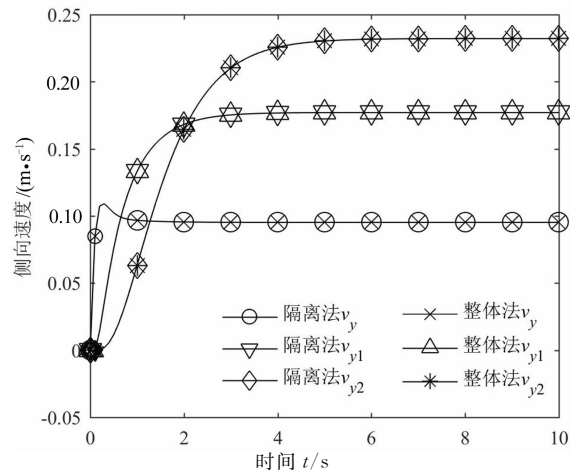
2.1 两种方法仿真结果对比

双半挂汽车列车各参数取值见表1。

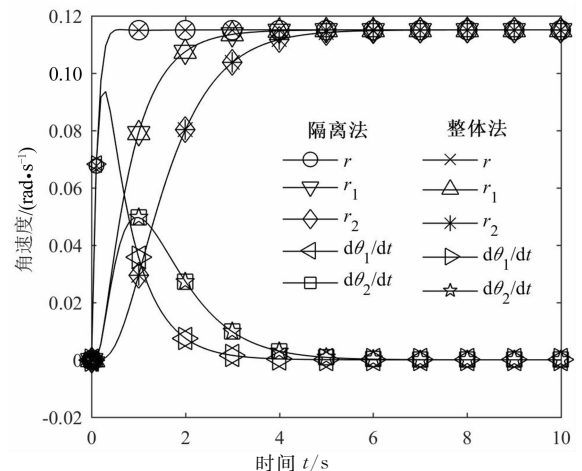
表1 双半挂汽车列车各参数取值
Table 1 Parameters values for B-double vehicles

参数	数值	单位	参数	数值	单位
m	8 439	kg	a	1.8	m
m_1	7 500	kg	b	2.1	m
m_2	7 540	kg	c	1.9	m
I_z	18 100	kg·m ²	a_1	5.1	m
I_{z1}	107 400	kg·m ²	b_1	2.9	m
I_{z2}	107 800	kg·m ²	c_1	2.6	m
k_f	181 332	N/rad	a_2	5.1	m
k_r	516 368	N/rad	b_2	2.9	m
k_1	544 296	N/rad	δ	0.06	rad
k_2	544 296	N/rad	v_x	10	m/s

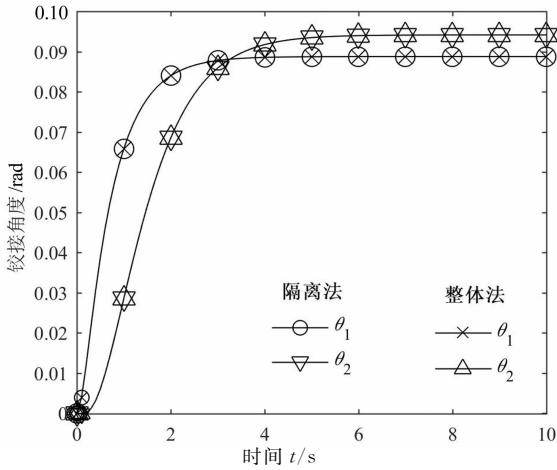
在牵引车前轮转角阶跃输入工况下,仿真结果如图5所示,整体法与隔离法的各物理量计算结果一致,曲线重合,验证了整体法建模过程的正确性。



(a)侧向速度对比图



(b)角速度对比图



(c) 铰接角度对比图
图 5 两种方法仿真结果对比
Fig. 5 Simulation results comparison of the two methods

在建模过程中,整体法与隔离法共用与牵引车相关的方程式(1)、(4)、(5)和约束条件式(13);方程组转化为矩阵形式,整体法的式(28)同隔离法的式(14)中的第一个等式,则 P 、 Q 和 R 各矩阵的第一行元素分别和 P_1 、 Q_1 、 R_1 各矩阵的第一行元素相同;整体法的式(32)同隔离法联立式(11)~(13)的化简结果,则 C 和 C_1 矩阵相同,这些为整体法和隔离法的相同点。

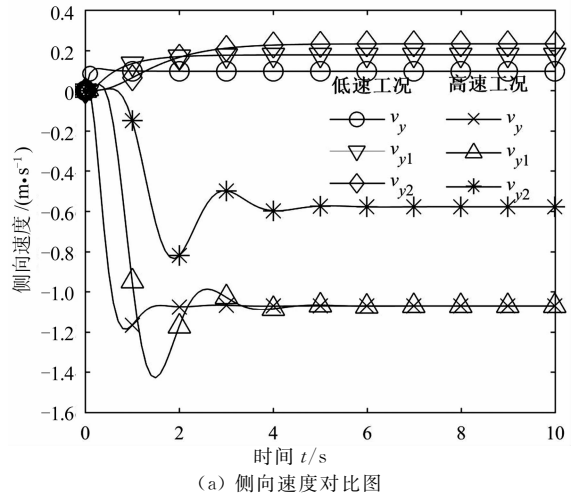
隔离法优势为思路清晰,隔离各车辆单元分析,列出性质相同和形式相似的方程式;劣势为约束条件代入方程式进一步化简时复杂繁琐,易出现计算错误。整体法优势为简洁明了,无需把大部分约束条件代入方程式,只需推导各车辆单元的质心侧向加速度和各轴的侧向速度方程式。整体法中包括运用隔离法,如牵引车和第一节半挂车当作整体,对此隔离分析导出式(22);第一节半挂车和第二节半挂车当作整体,对此隔离分析导出式(30);第二节半挂车当作整体,对此隔离分析导出式(31)。因此,整体法更适合多挂汽车列车的建模与仿真。

2.2 仿真结果分析

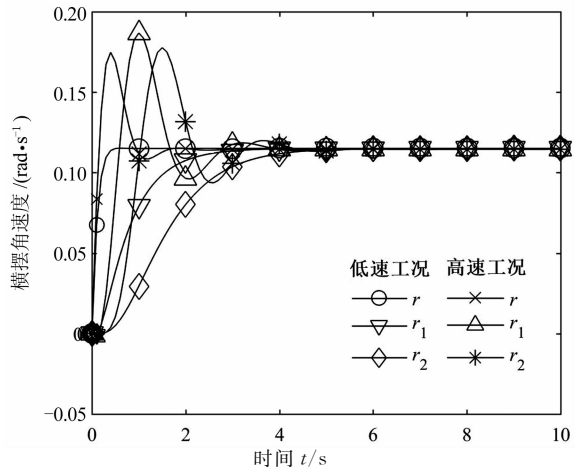
对仿真结果进行归类分析,在牵引车前轮角阶跃输入下,低速($v_x = 10$ m/s)和高速($v_x = 30$ m/s)工况时,各车辆单元的侧向速度、横摆角速度、铰接角速度、铰接角度、侧向加速度和质心位置随时间的变化趋势,如图 6 所示。

如图 6(a)所示,低速工况下,各车辆单元的侧向速度为正值,有向圆周内侧偏移的运动趋势,仅有 v_{y1} 出现峰值。各车辆单元的侧向速度达到稳态值的响应时间分别为 3.7 s、4.8 s 和 7.3 s,存在滞后性,其稳态值大小关系为 $v_y < v_{y1} < v_{y2}$;高速工况下,各车辆单元的侧向速度为负值,有向圆周外侧偏移的

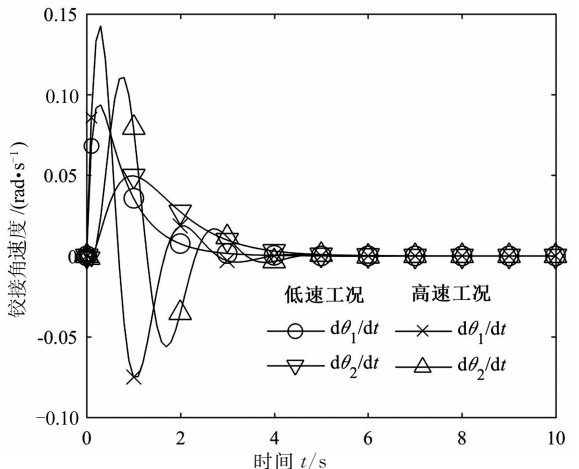
运动趋势。各车辆单元的侧向速度峰值依次为 -1.19 m/s、-1.43 m/s 和 -0.84 m/s,峰值响应时间依次为 0.9 s、1.5 s 和 1.9 s。其达到稳态值的响应时间分别为 5.7 s、7.8 s 和 8.2 s,存在滞后性,稳态值的大小关系为 $v_y \approx v_{y1} > v_{y2}$ 。除 v_{y2} 的峰值小于 v_{y1} 的峰值外,振荡频率和幅度依次增大,存在后部放大效应。



(a) 侧向速度对比图



(b) 横摆角速度对比图



(c) 铰接角速度对比图

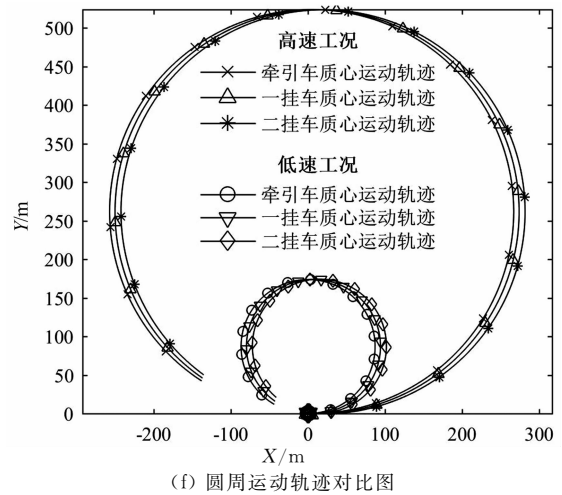
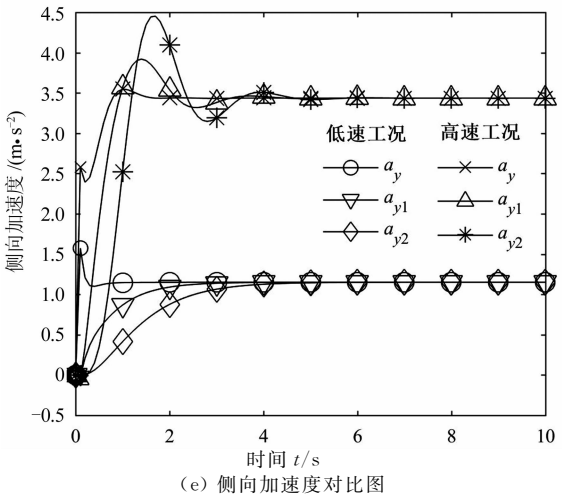
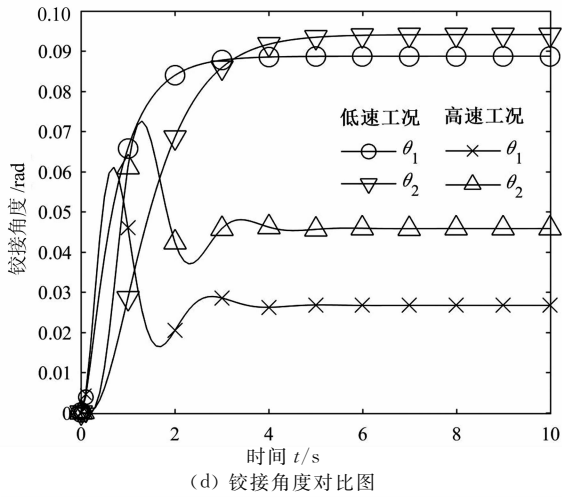


图6 各车辆单元仿真结果分析

Fig. 6 Simulation results analysis for each vehicle unit

如图6(b)所示,低速工况下,各车辆单元的横摆角速度曲线平滑,仅有 r_1 出现峰值.其依次达到稳态值的响应时间分别为1.9 s、5.3 s和7.3 s,存在滞后性,其稳态值的大小关系为 $r=r_1=r_2$;高速工况下,各车辆单元的横摆角速度曲线出现峰值依次为0.17 rad、0.19 rad和0.18 rad,峰值响应时间

依次为0.4 s、1.0 s和1.5 s.其达到稳态值的响应时间分别为3.9 s、6.2 s和6.6 s,存在滞后性,稳态值的大小关系为 $r=r_1=r_2$.除 r_2 的峰值小于 r_1 的峰值外,振荡频率和幅度依次增大,存在后部放大效应.

如图6(c)所示,低速工况下,两个铰接角速度的峰值依次为0.093 rad/s和0.050 rad/s,峰值响应时间依次为0.3 s和1.0 s,依次达到稳态值的时间为3.3 s和4.9 s,均存在滞后性,稳态值均逐渐接近0;高速工况下,两个铰接角速度运动趋势不变,峰值和振荡幅度均增大,峰值为0.14 rad/s和0.11 rad/s,峰值响应时间为0.3 s和0.8 s,依次达到稳态值的时间为3.8 s和4.4 s,均存在滞后性,稳态值均逐渐接近0.

如图6(d)所示,低速工况下,铰接角度曲线平稳,没有峰值,稳态值依次为0.089 rad和0.094 rad,达到稳态值的时间依次为4.5 s和6.6 s,存在滞后性;高速工况下,铰接角度出现峰值依次为0.061 rad和0.073 rad,峰值时间为0.7 s和1.3 s.稳态值依次为0.027 rad和0.046 rad,达到稳态值的时间依次为5.7 s和6.4 s,存在滞后性.铰接角度比低速工况时要小,表明两节半挂车有向圆周外侧偏移的运动趋势,其峰值和振荡幅度有所增大.

如图6(e)所示,低速工况下,仅有 a_y 存在峰值,两节半挂车的侧向加速度曲线平滑且响应时间滞后,依次达到稳态值的时间为3.5 s、6.1 s和8.2 s,其稳态值均为1.15 m/s²;高速工况下,各车辆单元的侧向加速度增大,峰值、振荡频率、振荡幅度依次增大,存在后部放大效应,峰值依次为3.55 m/s²、3.92 m/s²和4.46 m/s²,峰值时间依次为1.2 s、1.4 s和1.7 s,依次达到稳态值的时间为5.8 s、6.8 s和7.7 s,其稳态值均为3.44 m/s².文献[17]阐释了后部放大系数(RWA)的概念, a_{y2} 与 a_y 的峰值比值即为双半挂汽车列车的后部放大系数,则低速时的 $RWA=0.7317$,高速时的 $RWA=1.2558$,表明高速工况下有发生失稳的趋势.

如图6(f)所示,低速工况下,双半挂汽车列车的运动轨迹半径较小;高速工况下,其运动轨迹半径较大,这与实际情况相符^[17].

对比低速和高速工况下的仿真结果可知,侧向速度的方向发生了变化且绝对值增大,各物理量的振荡频率和幅度增大,响应时间提前,稳定时间滞后,存在后部放大效应,运动半径增大,与车辆的实际运动情况相同,进一步验证了整体法仿真结果的正确性.

3 结 论

采用隔离法和整体法分别建立了适用于 MATLAB 的双半挂汽车列车四自由度模型. 由于隔离法与整体法的仿真结果一致, 验证了整体法建模的正确性. 整体法的优势为不必过多考虑车辆单元间的约束条件, 减少了方程组的化简步骤, 有效提高了求解过程中的正确率, 适合多挂汽车列车的建模仿真, 为建立更复杂的系统动力学模型奠定基础.

在牵引车前轮角阶跃输入下, 各车辆单元的侧向速度、横摆角速度、铰接角速度、铰接角度和侧向加速度有相同的变化趋势; 高速工况相对低速工况而言, 各物理量的振荡频率和幅度增大, 峰值变动, 响应时间提前, 稳定时间滞后, 存在后部放大效应 (RWA), 更容易失稳.

参考文献

- [1] 应朝阳. 国家标准《汽车、挂车及汽车列车外廓尺寸、轴荷及质量限值》(GB 1589—2016)制修订情况介绍[J]. 汽车与安全, 2016(8):90—94.
- YING C Y. The introduction of national standard “Limits of dimensions, axle load and masses for motor vehicles, trailers and combination vehicles” revised edition (GB 1589—2016) [J]. *Auto & Safety*, 2016(8):90—94. (In Chinese)
- [2] 《汽车工程手册》编辑委员会. 汽车工程手册: 基础篇[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001:293—298.
- Editorial Committee of Automotive Engineering Handbook. *Automotive engineering handbook: basics*[M]. Beijing: China Communication Press, 2001:293—298. (In Chinese)
- [3] 黄朝胜, 隗海林, 吴振昕. 牵引车一半挂车列车动力学仿真研究[J]. 汽车工程, 2005, 27(6):744—750.
- HUANG C S, KUI H L, WU Z X. A simulation study on the dynamics of tractor-semitrailer combination[J]. *Automotive Engineering*, 2005, 27(6):744—750. (In Chinese)
- [4] 王国林, 韦超毅, 陆永华, 等. 半挂汽车列车模型的建立与试验[J]. 农业机械学报, 2005, 36(11):17—20.
- WANG G L, WEI C Y, LU Y H, *et al.* Modeling and experiments of tractor trailer[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2005, 36(11):17—20. (In Chinese)
- [5] 包继华, 张鑫, 张建武. 一种新的汽车列车动力学建模方法[J]. 上海交通大学学报, 2007, 41(2):244—249.
- BAO J H, ZHANG X, ZHANG J W. A new method of dynamic model building of combination vehicles[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2007, 41(2):244—249. (In Chinese)
- [6] 许洪国. 汽车理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2009:131—136.

- XU H G. *Auto theory*[M]. Beijing: China Communications Press, 2009:131—136. (In Chinese)
- [7] 日本自动车技术会编. 汽车工程手册 1: 基础理论篇[M]. 中国汽车工程学会, 译. 北京: 北京理工大学出版社, 2010:315—319.
- Society of Automotive Engineering of Japan, Inc. *Automotive technology handbook 1: Basic theory*[M]. Translator: SAE China. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2010:315—319. (In Chinese)
- [8] LUIJTEN M F J. Lateral dynamic behaviour of articulated commercial vehicles[D]. Eindhoven University of Technology, 2010.
- [9] 房永. 三轴半挂汽车列车稳定性控制算法研究[D]. 长春: 吉林大学, 2010.
- FANF Y. Research of stability control algorithm for triaxial tractor semitrailer[D]. Changchun: Jilin University, 2010. (In Chinese)
- [10] 常胜, 许洪国, 刘宏飞. 半挂汽车列车鞍座参数匹配及行驶特性分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2011, 38(2):35—40.
- CHANG S, XU H G, LIU H F. Extraction of the saddle parameters and analysis of the driving characteristic of tractor-semitrailer[J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2011, 38(2):35—40. (In Chinese)
- [11] (英)D. A. 柯尔. 汽车工程手册: 美国版[M]. 田春梅, 李世雄, 译. 北京: 机械工业出版社, 2012:266—268.
- CROLLA D A. *Automotive engineering*[M]. TIAN C M, LI S XT: Translator. Beijing: China Machine Press, 2012:266—268. (In Chinese)
- [12] LIN X, DING N, XU G, *et al.* High speed optimal yaw stability of tractor-semitrailers with active trailer steering[C]//SAE Technical Paper, 2014.
- [13] 孙扬. 全挂汽车列车的操纵稳定性及其控制[D]. 南京: 南京林业大学, 2015.
- SUN Y. Handling stability and control of full-trailer combinations[D]. Nanjing: Nanjing Forestry University, 2015. (In Chinese)
- [14] MENDES A S, MENEGHETTI D D R, ACKERMANN M, *et al.* Vehicle dynamics-lateral; open source simulation package for MATLAB[C]//SAE Technical Paper, 2016.
- [15] MOBINI F, GHAFARI A, ALIREZAEI M. Non-linear optimal control of articulated-vehicle planar motion based on braking utilizing the state-dependent Riccati equation method[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2015, 229(13).
- [16] SONAWANE H, PALIWAL G, JAIN S, *et al.* Steady state handling performance study & optimization of tractor-semitrailers[C]//SAE Technical Paper, 2017.
- [17] HE Y, ISLAM M M, WEBSTER T D. An integrated design method for articulated heavy vehicles with active trailer steering systems[J]. *SAE Technical Papers*, 2010, 3(1):158—174.